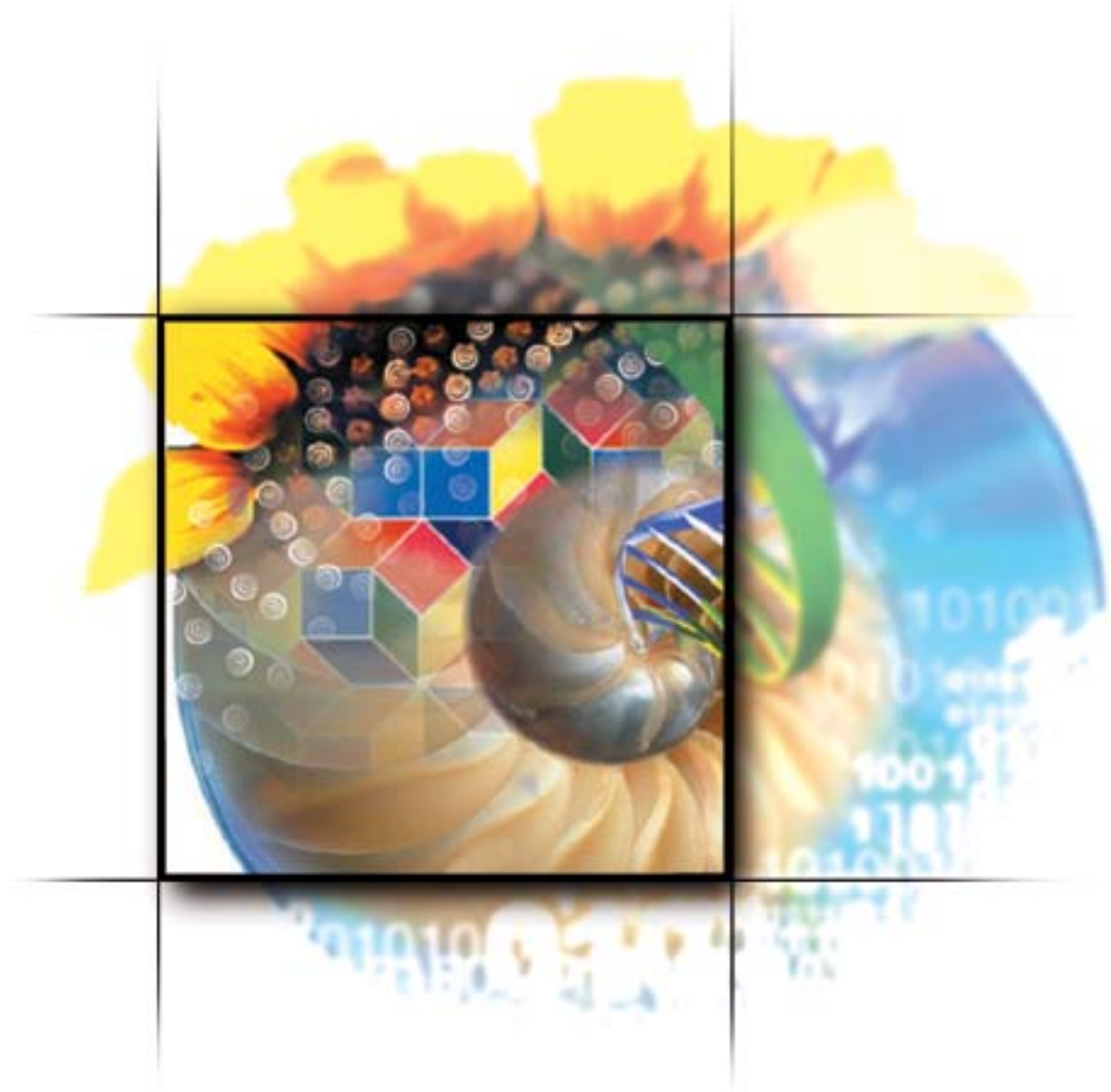




Pourquoi les mathématiques ?

Experiencing
mathematics

Une exposition internationale réalisée à l'initiative et avec le concours de l'UNESCO



"Pourquoi les mathématiques ?"

*Ce dossier complète l'exposition interactive réalisée à l'initiative de l'Unesco.
Ces textes ont été écrits par Anita Castiel avec le concours des mathématiciens
qui ont contribué à élaborer chacun des thèmes de cette exposition.*

Thème 1 - Lire la Nature - Read the Nature

Mathématiques très Space ! p 03

Thème 2 - Paver un Sol - Tilings & Symmetries

Où suis-je, où vais-je ? p 08

Thème 3 - Remplir l'espace - Filling a Space

L'orange du marchand p 13

Thème 4 - Relier d'un Trait - Graphs & Connections

Téléphone fixe : liaisons fatales p 18

Thème 5 - Pourquoi calculer ? - Calculating

Des images très calculées ! p 23

Thème 6 - Construire - Constructing

La courbe des autoroutes p 28

Thème 7 - Estimer - Prévoir - Estimating

Les maths, un très bon placement ! p 33

Thème 8 - Optimiser - Optimisation

Chemins de ronde p 37

Thème 9 - Prouver - Démontrer - Proving

L'épreuve de la preuve p 42

Pourquoi les mathématiques ?

Une exposition internationale
réalisée à l'initiative de l'UNESCO

S'inscrivant dans le droit fil de son engagement à promouvoir la coopération internationale, l'UNESCO articule les travaux de mathématiciens de premier plan autour d'une exposition qui va parcourir de nombreuses villes du monde. Pour le Japon, le groupe est dirigé par le Professeur Jin Akiyama, Directeur général adjoint de l'Institut de recherches sur le développement de l'éducation auprès de l'Université de Tokai (Japon). Ses travaux rendent hommage à la beauté et à la puissance des mathématiques à travers des objets artistiques illustrant les concepts et les formules mathématiques et à travers des modèles et des dispositifs qui donnent au public une chance de faire des expériences, des découvertes, et de se faire une idée nouvelle des vérités mathématiques. Pour la France, la source d'inspiration est le Comité pour l'Année mondiale des mathématiques 2000, dirigé à l'époque par le Professeur Mireille Chaleyat-Maurel. Dans ce cadre ont été conçues et réalisées des séries d'affiches exposées dans les stations du métro parisien sur le thème « Maths dans la vie quotidienne » et « Maths dans la nature ».

L'exposition internationale sur les mathématiques vient en réponse à la non-sensibilisation du public au fait que, au xx^e siècle, les mathématiques se trouvent au cœur de la vie quotidienne, et qu'elles ont le pouvoir de la façonner. Les systèmes mathématiques qui rendent possibles les opérations et la fabrication d'objets qui jalonnent notre quotidien ne sont pas visibles. Lorsque quelqu'un utilise un téléphone ou une carte de crédit, écoute un CD, conduit une voiture ou prend l'avion, a-t-il conscience que ce sont les mathématiques qui font marcher ces appareils ? De même, lorsque quelqu'un investit en bourse, consulte le bulletin météo ou admire une œuvre d'art, il n'est pas conscient de la relation qui existe entre ces actes et les mathématiques. Souvent, même, les adultes proclament, non sans une pointe de fierté, qu'ils ne connaissent rien aux mathématiques. La plupart des gens pense que les mathématiques sont "ennuyeuses et difficiles". Les mathématiques n'ont jamais été aussi impopulaires que de nos jours. Plusieurs pays reconnaissent la réalité d'une crise des mathématiques, cristallisée par la baisse dramatique des effectifs d'étudiants et la pénurie d'enseignants qualifiés.

Pourquoi les mathématiques ? est conçue et réalisée pour sensibiliser davantage le public à l'importance des mathématiques, pour lui montrer à quel point les mathématiques sont essentielles à son existence quotidienne - qu'il s'agisse d'activités économiques de base ou de gestion des gares et des aéroports -, tout en apportant la preuve qu'elles sont divertissantes, intéressantes et vraiment à la portée de tout un chacun. L'exposition s'adresse à des jeunes de 10 à 18 ans, ainsi qu'à leurs parents et enseignants.

Pourquoi les mathématiques ? présente des posters, des modèles d'expérimentation, des dispositifs interactifs autour de divers thèmes, parmi lesquels : Formes de la nature - Des points, des traits et des couleurs - Nombres et codes secrets - Les hasards de la vie - Ordre et chaos - Arts et mathématiques - Des mathématiques étonnantes...

Sa toute première présentation a été faite en juillet 2004 à Copenhague, lors du 10^e Congrès international de l'enseignement mathématique (ICME10). Elle a été présentée ensuite en France, en octobre à Orléans et, pour son inauguration officielle en décembre, à la Maison des Métallos, en coopération avec la Mairie de Paris.

Les demandes d'accueil de l'exposition à l'avenir seront examinées par le groupe de travail du projet mené par l'UNESCO. Le groupe, en renforçant la coopération internationale tout en sollicitant un soutien technique et financier, vise à rendre l'exposition accessible aux pays en développement, à former les enseignants à l'utilisation des manipulations et à faire adopter ces mathématiques « main à la pâte » dans les écoles.

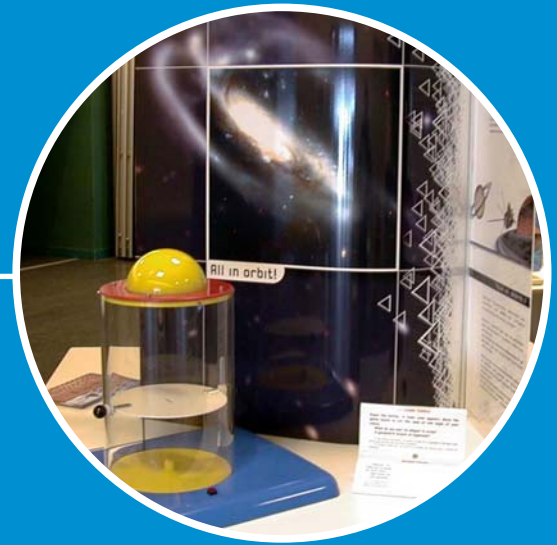
Minella C. Alarcon

Division des sciences fondamentales
et des sciences de l'ingénieur
UNESCO, Paris, France



Maths très Space !

1 - Lire la nature - Read the nature



Placer des satellites en orbite autour de la Terre ou d'une planète, les arracher à l'attraction terrestre ou guider des sondes dans leur voyage interplanétaire est un travail d'orfèvre, gros consommateur de calculs et de mathématiques de pointe.

Les mathématiciens utilisent des outils développés depuis belle lurette, lois de Newton [1687], méthode de Lagrange [1755] ou de Gauss [1801]... mais aussi des résultats récents, des théories du contrôle optimal, de la relativité ou du chaos déterministe.

Bye Bye Rosetta

Lorsque la sonde européenne Rosetta a pris son envol le 2 mars 2004 pour rejoindre la comète Churyumov-Gerasimenko, Chury pour les intimes, on est loin du vulgaire « trekking » dans l'espace.

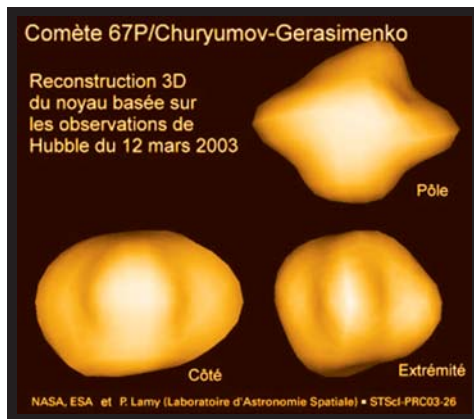
Son périple, qui durera 10 années, promet d'être l'un des plus complexes que les experts du spatial aient jamais organisé. Sa mission, réussir son rendez-vous avec Chury en mai 2014, suivre la comète durant une année et déposer son atterrisseur Philae sur un sol dont on ne connaît absolument rien. Cette odyssée événement du xxie siècle a bien sûr convoqué toutes les subtilités de la mécanique céleste et des mathématiques les plus pointues. Pour avoir une idée de la complexité, il suffit de se rappeler qu'une comète est un objet interstellaire très mobile et que Chury se situe à plusieurs milliards de kilomètres de la Terre.



Chorégraphies célestes

Le secteur spatial relève des défis techniques et mathématiques démoniaques.

Imaginez que vous essayez, par une mer démontée, d'atteindre avec votre radeau et à la seule force de vos mains, une embarcation à la dérive située à plusieurs dizaines de kilomètres ! Tel est le défi que doivent régulièrement relever les experts du spatial pour placer, orienter et maintenir un satellite sur orbite ou pour guider une sonde. La précision requise est impressionnante, de l'ordre du centimètre pour le contrôle d'un satellite situé à plusieurs centaines de kilomètres de la Terre. Cette configuration constitue pourtant le cas le plus courant. *[cf. article suivant]*.



<http://jmm45.free.fr/cometes/churgera/churgera.htm>

Une grande part des problèmes d'ordre mathématique qui se posent aux scientifiques et ingénieurs relève de la théorie du contrôle optimal. Ainsi, lorsqu'une sonde « taille » sa route dans l'espace, on cherche à « optimiser » et « contrôler » son voyage. De manière générale, en mathématiques, le mot « optimiser » signifie qu'on souhaite minimiser ou maximiser une grandeur. Et la notion de « contrôle » signifie que le système possède un paramètre sur lequel on peut jouer pour atteindre son but. Dans le cas de la sonde, les experts doivent définir l'enchaînement des opérations permettant d'aller d'un état initial à un état final prédéterminé en faisant fonctionner le moins possible les moteurs. En effet, la quantité de carburant qu'elle peut emporter est limitée.

Une technique subtile consiste à utiliser la gravitation de divers astres pour la dévier et l'accélérer : il s'agit de l'effet de « fronde gravitationnelle ».

Un des succès les plus frappants de l'effet de fronde gravitationnelle est probablement le cas de la sonde Voyager, lancée en 1977 pour un long périple d'exploration des planètes Jupiter, Saturne, Uranus et Neptune. Ce trajet, sans utiliser l'effet de fronde gravitationnelle, aurait dû prendre, dans le meilleur des cas, à peu près 30 ans. Or Voyager n'a mis que 12 ans pour atteindre Neptune. Voyager a aussi bénéficié d'une configuration particulièrement favorable des planètes permettant de minimiser le trajet parcouru et qui ne se reproduit qu'une fois tous les 176 ans environ...



La sonde Rosetta *[cf. encadré 1]* exploitera elle aussi ses passages près de la Terre et de Mars entre 2005 et 2009 pour raccourcir son trajet. Il lui faudra préserver son carburant dont elle aura grand besoin en mai 2014 pour se mettre en orbite autour de Chury et y déposer son atterrisseur Philae. Car, contrairement aux missions planétaires, l'attraction de la gravitation ne lui sera d'aucune aide, puisque la comète est trop peu massive.

Par ailleurs, les ingénieurs sont souvent confrontés au problème du maintien d'un satellite sur son orbite. Là encore, il faut trouver les manœuvres qui le permettent en consommant le minimum d'énergie. Les mathématiciens spécialistes en contrôle optimal ont montré qu'il est plus avantageux en termes d'économies de carburant d'utiliser des moteurs de poussée faible mais capables de fonctionner en continu. Ce type de moteurs devrait se généraliser et remplacer les moteurs actuels qui fonctionnent par poussées brèves et fortes.

La théorie du contrôle optimal est une branche relativement jeune des mathématiques appliquées en pleine expansion. Elle est née

dans le milieu des années 1940, notamment pour répondre aux besoins de l'industrie aéronautique. L'un de ses résultats les plus percutants est le « Principe du maximum de Pontryagin » obtenu par des chercheurs soviétiques, dont Lev Pontryagin, vers 1960. Ce théorème établit les conditions nécessaires que doit vérifier toute solution d'un problème de contrôle optimal. Il apporte une aide précieuse dans la recherche effective des solutions.



trajectoire rétrograde de Mars ©Nasa

Toutes les méthodes mathématiques utilisées dans le secteur spatial sont friandes de calculs numériques très volumineux. Et les mathématiciens ne savent plus à quel saint-ordinateur se vouer ! Ils savent que les erreurs sont inévitables, humaines ou dues au fonctionnement même de l'ordinateur.

C'est ainsi que la sonde Mars Climate Orbiter s'est écrasée sur Mars en septembre 1999 à cause d'une étourderie ahurissante : une partie des concepteurs des logiciels supposait que l'unité de mesure était le mètre, et l'autre partie que c'était le pied [l'unité anglaise]. Par ailleurs, même avec un système informatique irréprochable, la plupart des calculs conduisent à des erreurs inévitables. En effet, le résultat d'une opération sur ordinateur ne peut, presque jamais, être représenté exactement : il doit être arrondi, c'est-à-dire fournir un nombre machine proche du résultat exact. Les nombres représentables exactement, qui forment un sous-ensemble des nombres rationnels, sont appelés nombres

machine. Une succession d'arrondis peut conduire à des résultats extravagants. « L'arithmétique virgule flottante », celle qu'utilisent les ordinateurs, est actuellement un sujet de recherches crucial.

Les experts du spatial font aussi appel à la mécanique céleste, une discipline vieille de trois siècles mais toujours efficace [cf. encadré 2]. Grâce à elle, on sait que s'arracher à l'attraction terrestre constitue la phase la plus délicate et la plus coûteuse en énergie. Pour avoir une chance de s'extraire du puits de gravitation de la Terre, le satellite ou la sonde doivent atteindre au moins 40 000 km/h, la vitesse de libération. En deçà de cette vitesse, l'objet serait simplement satellisé autour de la Terre, sur une orbite qui, selon les lois de Képler [cf. encadré 1], sera une ellipse ou un cercle. Uniquement au-delà de cette vitesse, le satellite va échapper à la sphère d'influence de la Terre et s'élancer sur une orbite hyperbolique, dans le vide interplanétaire, avec l'excédent de vitesse qu'il aura pu conserver.

Les lois de la mécanique céleste ne sont aisément opératoires que dans le cas d'un « problème à deux corps », par exemple pour déterminer le mouvement de la Terre en présence du Soleil en négligeant l'action des autres corps du système solaire. Ce cas de figure, bien restrictif, ne correspond pas au contexte réel. Dès que trois corps sont en interaction gravitationnelle, le problème devient d'une difficulté considérable et fait toujours l'objet de recherches pointues. C'est en s'y attaquant au début du ^{xx}e siècle que le mathématicien français Henri Poincaré a posé les bases de ce que l'on appelle aujourd'hui la théorie du « chaos déterministe » et « des systèmes dynamiques ». Grâce aux ordinateurs modernes, il est possible d'approcher la solution du système d'équations de ce problème dès lors que l'on connaît la position et les vitesses de tous les corps à un instant donné ou les « conditions initiales ». Par exemple, les solutions peuvent être recherchées sous forme de développements en séries trigonométriques de l'écart aux lois de Képler.

Les méthodes de la mécanique céleste ne livrent en fait qu'une trajectoire moyenne qu'il faut ensuite affiner, c'est-à-dire déformer, pour prendre en compte les imprévus du voyage interplanétaire ou de la mise en orbite : frottements avec la haute atmosphère ou rayonnements électromagnétiques par exemple. C'est donc au prix de calculs démoniaques et de théories de pointe que les mathématiciens sont devenus les chorégraphes de l'espace.

Histoires orbitales !

Au xvi^e siècle, Nicolas Copernic montre que la conception géocentrique de l'Univers, qui prévalait depuis l'Antiquité est fausse. La Terre n'est plus le centre du monde. Dans le système de Copernic, toutes les planètes décrivent des cercles autour du Soleil.

Mais très vite, le système ne tourne plus rond : les observations de Mars effectuées par Tycho Brahe, ne s'accordent pas avec des orbites circulaires.

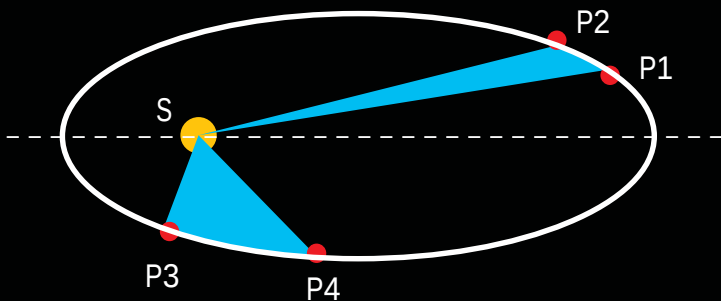
Le mathématicien Johannes Képler va résoudre ce problème en énonçant les trois lois qui portent son nom.

Première loi [1609] : les orbites des planètes sont des ellipses dont le Soleil occupe un des foyers.

Deuxième loi, dite loi des aires [1609] : les aires balayées par les rayons vecteurs allant du centre du Soleil au centre de la planète sont proportionnelles aux temps employés à les décrire.

Troisième loi [1619] : les carrés des temps de révolution des planètes sont proportionnels aux cubes des demi-grands axes des orbites.

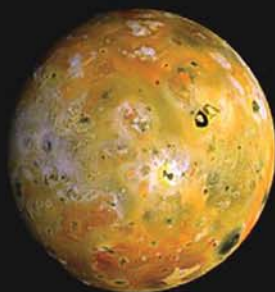
Les lois de Képler ont été confirmées et expliquées par de nombreux scientifiques ultérieurs. Elles s'appliquent à n'importe quel système orbital à deux corps, comme les satellites artificiels qui orbitent autour de la Terre. Ainsi les planètes et bon nombre de satellites artificiels décrivent une ellipse dont le Soleil ou la Terre occupent l'un des foyers. Les comètes, qui ont des périodes extrêmement longues, suivent des trajectoires très elliptiques, presque paraboliques. Enfin, après s'être échappés de l'attraction du système solaire, une sonde ou un satellite trace sa route, sans effort selon une trajectoire hyperbolique.



La preuve par le satellite

Depuis le mois d'avril 2004, la sonde américaine Gravity Probe B fait « sa grande cuisine » du haut de son orbite polaire, à 650 km d'altitude. Son but, vérifier la théorie de la relativité générale d'Einstein. Après des décennies d'attente, cette expérience est la concrétisation d'un rêve pour tous les scientifiques du globe. Car, bien que plusieurs des prédictions de cette théorie aient déjà été vérifiées avec une incroyable précision, elle doit encore faire ses preuves.

Selon la relativité générale, la masse des objets célestes déforme l'espace-temps qui en devient « courbe ». Ainsi, les planètes et les étoiles sont attirées les unes aux autres comme des boules sur une couverture tendue qu'elles déforment par leur masse. La lumière n'échappe pas à cette « machination » gravitationnelle. Pour mesurer la « courbure » de l'espace-temps il faut pouvoir étudier la trajectoire d'un objet hypersensible, comme les chercheurs vont le faire avec la sonde Gravity Probe B. A son bord, les axes de quatre gyroscopes ultra « high tech » ont été alignés sur une étoile prédéterminée dans la constellation de Pégase et constituent le système de référence espace-temps. Les chercheurs vont mesurer durant plusieurs mois les plus infimes variations de l'alignement des axes sous l'effet gravitationnel de la Terre... si elles existent. Ces effets si infimes pour la Terre ont toutefois des implications à grande échelle sur la nature et la structure même de l'Univers.



Pour en savoir plus

Sur le web

www.ksc.nasa.gov/elvnew/gpb/vlcc.htm

[Gravity Probe B en direct]

<http://smc.cnes.fr/ROSETTA/Fr/index.htm>

[Tout sur Rosetta !]

www.bdl.fr/Granpub/Promenade/pages2/201.html

[Astronomie et histoire de l'astronomie]

<http://www.ac-nice.fr/physique/kepler>

[Un site interactif sur les 3 lois]

Dans les livres

- Jean-Pierre Verdet, Une histoire de l'astronomie, Points Science, Éditions du Seuil, Paris, 1990
- Ludwik Celnikier, Basics of cosmic structures, Éditions Frontières, Paris, 1999

Où suis-je, où vais-je, et dans quel état j'erre ?

2 - Paver le plan - Tilings & Symmetries



Le système américain Global Positioning System (GPS), et dès 2008, le système européen Galileo vont changer vos vies. Bientôt, dans vos agendas, vous indiquerez l'heure et les coordonnées du rendez-vous et un véhicule vous conduira automatiquement, non plus en « temps et en heure » mais « en temps et en lieu » ! Dans un avenir proche, des puces GPS miniatures et bon marché seront incorporées dans des téléphones cellulaires, des ordinateurs, des montres et peut-être dans notre propre corps !

Disposer de sa position exacte peut être considéré, dans le jargon de l'historien des sciences, comme une rupture épistémologique, car, rien ne sera plus comme avant.

Le Ciel travaille pour la Terre

Ne plus avoir peur de se perdre dans une forêt bien noire et profonde

Ni tourner en rond avant de trouver le chemin tarabiscoté qui mène vers un petit paradis déserté des touristes

Ou mémoriser 1 500 des 5 334 rues de Paris pour réussir le permis de chauffeur de taxi

Retrouver l'endroit où vous avez garé votre voiture

Pour un détective, organiser ses filatures

Pour un pilote d'avion, connaître sa vitesse instantanée et disposer d'un plan de vol sûr

Savoir sous quel tropique, exactement, sous quelles latitude et longitude, à quelle altitude ou profondeur, vous errez, grimpez ou plongez...

Scruter les nouvelles cartes et se rendre compte que le Mont Blanc ne mesure plus 4 807 m mais 4 810 m et 40 cm...

A quelque 20 000 km de hauteur, les 24 satellites du Global Positioning System veillent sur la Terre et la liste de ses applications est loin d'être close.



Né sous le signe du GPS

Le Global Positioning System [GPS] permet de mesurer avec précision sa position en n'importe quel point de la Terre, tant au sol que dans les airs ou sous la mer. Une révolution au quotidien et un enjeu stratégique majeur.



Le Mont-Blanc : 4810m et 40 cm !

Dans le ciel, une nouvelle « constellation » brille depuis 1990. Les 24 satellites américains du Global Positioning System [GPS] émettent en permanence des signaux codés qui peuvent être reçus sur terre par un récepteur adéquat. Chacun peut en déduire sa position exacte, tant au sol que dans les airs ou sous la mer, à quelques dizaines de cm près.

À l'origine, ce système est un dispositif militaire, conçu par l'armée américaine pour son usage personnel, comme le guidage de missiles ou l'assistance à la navigation d'avions et de véhicules de reconnaissance.

Depuis 1995, les citoyens de tous les pays sont contents, puisqu'ils ont accès au GPS et à ses applications... Du moins, presque, car cet accès reste limité en termes de précision de positionnement, voire, en cas de crise majeure comme une guerre, tout simplement fermé.

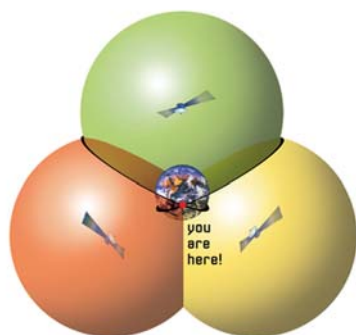
La kyrielle d'applications, civiles, militaires, cartographiques... qui découle du simple fait de connaître l'heure et sa position exactes n'en finit pas de s'allonger [cf. *Le Ciel travaille pour la Terre*]. Ainsi, derrière un système tel que GPS se tapit un enjeu stratégique majeur. On comprend donc que l'Europe ait décidé de s'affranchir de l'emprise de l'armée américaine qui peut limiter à loisir les performances de l'accès à GPS. Cette indépendance sera effective dès 2008 avec l'entrée en service du système Galileo et sa constellation de 30 satellites.

Commençons par décrire la constellation GPS. Les 24 satellites se répartissent sur 6 orbites circulaires à 20 200 km d'altitude, par groupe de quatre, inclinés à 55° par rapport au plan de l'équateur et décalés en longitude de 60° les uns des autres. Chaque satellite est dit « phasé » d'une période de 12 heures. En d'autres termes, chaque satellite repasse deux fois par jour au même endroit. Cette distribution permet de couvrir l'ensemble de notre planète et au moins quatre satellites sont visibles simultanément depuis n'importe quel point du globe. On peut constater que les satellites ne passent jamais au-dessus des contrées de latitude supérieure à 55° , mais cela n'empêche pas qu'ils y soient visibles. Cette couverture suffit amplement pour entrer de plain-pied dans l'univers GPS.



Pour se localiser un observateur doit déterminer les distances d_1 , d_2 et d_3 qui le séparent de trois satellites S_1 , S_2 et S_3 du système GPS. Ces distances sont calculées à partir de la mesure des temps de parcours des signaux émis par les satellites sur une fréquence unique et commune à tous de 1 575,42 MHz. Ces signaux permettent de connaître exactement la position du satellite. Le récepteur se met donc à l'écoute de la fréquence des satellites actifs, c'est-à-dire dans son champ de captation, et recueille le maximum d'informations sur leurs trajectoires et l'état de l'ionosphère. Pratiquement, les satellites génèrent un code pseudo-aléatoire qui est modulé sur les ondes porteuses. Les récepteurs GPS génèrent également un même code, synchronisé par rapport à ceux des satellites. Pour déterminer la distance séparant un satellite d'un récepteur, on va mesurer le temps de propagation d'un code se déplaçant à la vitesse de la lumière. Quand le récepteur le reçoit, il est capable de déterminer le retard dû au trajet parcouru. La mesure se fait en retardant le code du récepteur jusqu'à ce qu'il soit aligné sur le code du satellite. On trouve ainsi une différence de temps que l'on peut multiplier par la vitesse de la lumière, pour obtenir la distance cherchée. Merci Einstein !

Le paramètre d_1 permet de se situer sur une sphère de rayon d_1 et de centre S_1 ; d_2 sur une sphère de rayon d_2 et de centre S_2 , donc sur le cercle intersection de ces deux sphères : enfin d_3 sur une sphère de rayon d_3 et de centre S_3 . Ces trois paramètres localisent l'observateur à l'intersection des 3 sphères. Deux positions, P_1 et P_2 , sont alors possibles, symétriques par rapport au plan des satellites, mais l'ambiguïté se lève facilement puisque si l'un des points, P_1 par exemple, est au voisinage de la Terre, P_2 sera à plus de 40 000 km de la surface de la Terre. Les satellites disposent d'une horloge embarquée d'une très grande précision car, pour obtenir une résolution de l'ordre du mètre, l'exactitude de l'horloge doit être de 1 à $2 \cdot 10^{-9}$ secondes ! Pour pallier cette difficulté et améliorer la précision il faut souvent faire intervenir un quatrième satellite.



Cette méthode permet d'obtenir la longitude, la latitude, mais aussi l'altitude de l'observateur ou sa vitesse. C'est ainsi que le 8 septembre 2001 à 07 h 00 (temps universel) le Mont Blanc a pris de la hauteur grâce à GPS. A cette date, il passe de 4 807 m à 4 810,40 m, avec une marge d'erreur de plus ou moins 10 cm. Les cartes de l'Institut géographique national (IGN) intègrent, cette nouvelle donnée, au fur et à mesure de leur renouvellement. Grâce au procédé GPS, on sait aussi que le toit du monde, l'Everest a dû revoir ses prétentions à la baisse. Il ne culmine plus qu'à 8 846,4 m. d'altitude et non plus 8,848 m. Par ailleurs, les notions d'altitude et de profondeur se rejoignent dans les abysses océaniques. Grâce encore à GPS (et à d'autres satellites), des cartes des fonds marins se construisent en ce moment, ce qui semblait impossible voilà à peine quelques années.

Le récepteur GPS peut aussi calculer sa vitesse instantanée de déplacement en jouant sur un effet physique, l'effet Doppler. En effet lorsque le récepteur se déplace, même lentement, un léger déphasage se manifeste entre le signal calculé et le signal reçu. Cet effet, qui se superpose à la vitesse des satellites, plus de 3,88 km/s, est très faible. Mais il suffit pour le calcul de la vitesse instantanée du récepteur par rapport à la Terre.

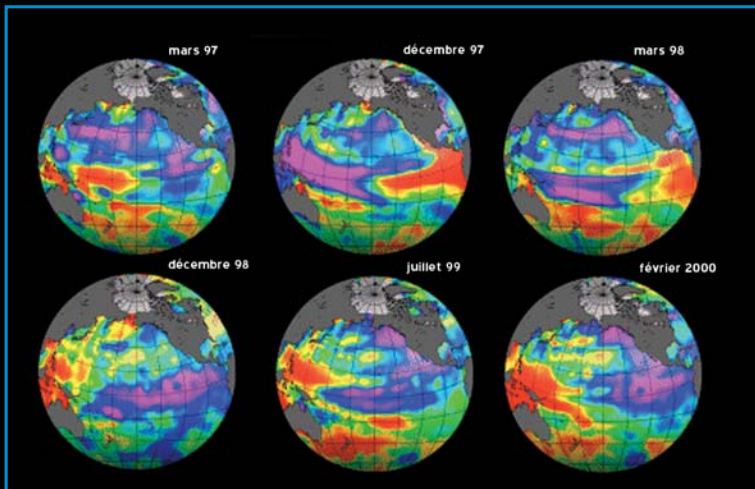
GPS implique donc beaucoup de mathématiques, une bonne dose de calculs (non, ce n'est pas la même chose) et repose sur des principes de physique pointue comme la mécanique quantique et théorie de la relativité. On peut d'ailleurs considérer GPS comme une application concrète du concept d'espace-temps introduit par Einstein. Le système repose sur le second postulat d'Einstein, à savoir l'invariance de la vitesse de la lumière dans le vide. Le physicien trouve dans GPS un fabuleux banc d'essai et de vérification de la théorie de la relativité générale. En effet, GPS requiert des instruments très précis, qui se déplacent à grandes vitesses. Dès lors, les influences relativistes et de mécanique quantique sont observables. D'où la mise en œuvre d'une belle partie de l'arsenal des concepts de la théorie de la relativité, comme la dilatation du temps (due à la vitesse des horloges embarquées) ou l'effet Sagnac (de la rotation de la Terre sur les horloges terrestre).



Et le mathématicien ? D'une part, en physique quantique ou relativiste, on ne sait plus si le physicien est mathématicien ou l'inverse. Mais quoi qu'il en soit, un récepteur GPS doit résoudre très rapidement des problèmes numériques complexes et met en œuvre des algorithmes compliqués d'encodage et de synchronisation. Ainsi, le mathématicien ne peut que s'extasier devant ce condensé de technologie... dont il est l'un des initiateurs !

Le projet européen Galileo

Galileo sera comparable au système américain GPS, mais d'essence civile uniquement, et plus performant, notamment en termes de précision de positionnement. Opérationnel en 2008, il repose sur une constellation de 30 satellites situés à 24 000 km de la Terre. Pour ne pas interférer avec GPS, il faudra hélas, acheter de nouveaux récepteurs. En brisant le monopole américain, le projet Galileo a obligé GPS à peaufiner son offre en direction des civils dès l'an 2000. La précision de positionnement proposée usuellement par GPS est ainsi passée de 100 m à 3 m et ne cesse de s'améliorer ! Vive donc la compétitivité !



Cartes altimétriques :

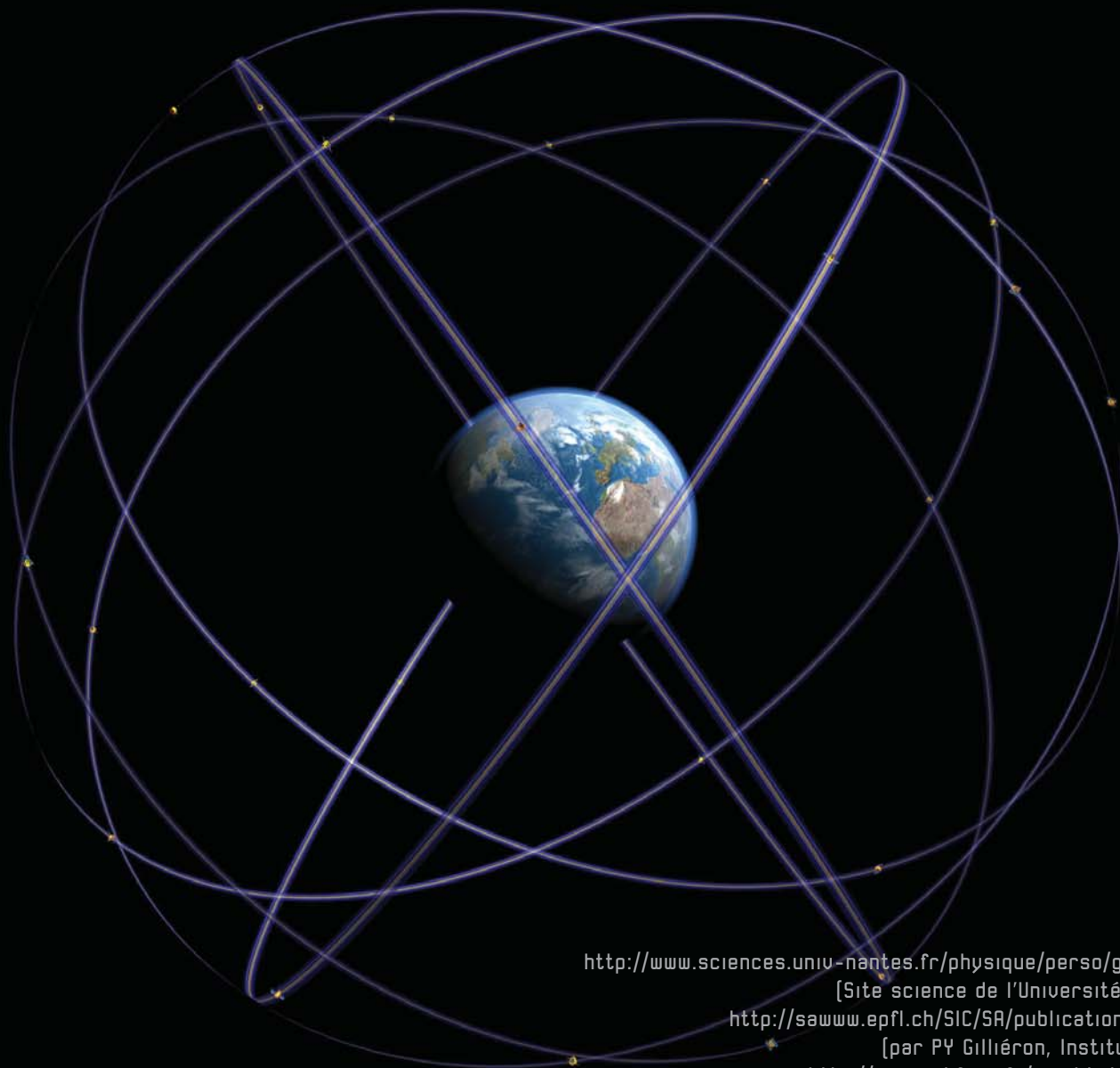
El Niño/La Niña sous l'œil de Topex/Poseidon. (Yves Menard - Cnes)

A l'Est du Pacifique Equatorial : on observe une anomalie positive du niveau de la mer de plus de 20 cm en 1997 (El Niño est à son maximum) et une anomalie négative de 20 cm en 2000 (La Niña est à son maximum).



SIEL, Voilà le bus !

Grâce au GPS, les usagers de certaines lignes de bus parisiennes prétendent heureux, en attendant le passage du prochain véhicule. Depuis quelques mois, ils lèvent les yeux au Siel, ces écrans à cristaux liquides placés dans les abribus qui affichent en temps réel le nombre de minutes à attendre avant le passage du prochain bus. 41 lignes sur 59 auront été testées en 2004, soit 2 400 points d'arrêt concernés. Un repérage par satellites GPS calcule la vitesse du bus et son moment d'arrivée à la station comme au terminal. Un « régulateur » ou une « régulatrice » observe, depuis chaque terminus le déplacement des véhicules de la ligne. En cas de dysfonctionnement, les conducteurs sont tenus de ralentir ou d'accélérer pour respecter les horaires de passage prévus, voire de dévier leur trajet, afin d'éviter un bouchon. Mais la surveillance par satellites n'a pas supprimé le radiotéléphone... ni sa voix humaine !



Vue d'artiste de la constellation GALILEO. ©ESA-J. Huart

Pour en savoir plus

Sur le web

<http://www.sciences.univ-nantes.fr/physique/perso/gtulloue/Meca/Planetes/GPS.html>

[Site science de l'Université de Nantes et pour tout public]

<http://sawwww.epfl.ch/SIC/SA/publications/F198/f1-5-98/5-98-page1.html>

[par PY Gilliéron, Institut de Géomatique, EPFLausanne]

<http://agirard.free.fr/gps.html> [Le GPS, mode d'emploi général]

www.chez.com/startair/download/gps.pdf

[La physique du GPS : HP Garnir, D. Strivay et T. Bastin - Ipnas - Université de Liège]

Quelques sites en anglais

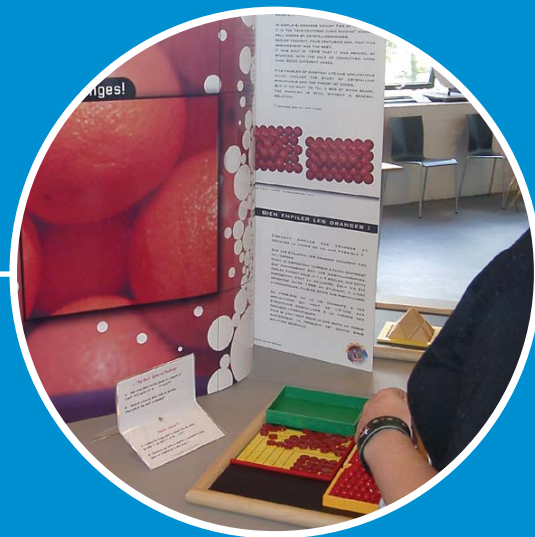
<http://www.colorado.edu/geography/gcraft/notes/gps/gps.html>

<http://tycho.usno.navy.mil/time.html>

<http://www.aip.org/pt/vol-55/iss-5/current.html>

L'orange du marchand

3 - Remplir l'espace - Filling a space



Empiler des oranges : une évidence pour l'épicier, un casse-tête pour les mathématiciens. La meilleure façon d'empiler des sphères identiques de manière aussi dense que possible est bien la plus simple. Ce problème a été conjecturé par Képler dès 1610. En apparence anodin, il trouve des applications dans l'étude des cristaux ou la théorie du codage des données informatiques. Les mathématiciens ont mis quatre siècles à le démontrer.

Pourquoi perdre ses rondeurs ?

Avez-vous remarqué qu'un nombre croissant de tomates prend désormais la forme de sphère aplatie ?

Si les agronomes chargés de leur amélioration s'intéressent d'aussi près à leur allure, c'est tout simplement pour répondre aux contraintes des transporteurs. Car en perdant de leur rotundité, elles peuvent remplir de manière plus compacte les cageots.

Et le saviez-vous ? Des cheminots exercent un métier aussi utile que méconnu : ils aiguisent des cailloux ! En effet, les TGV poncent les pierres entassées en ballast à chacun de leur passage. En devenant de plus en plus rondes, les pierres voient la densité de leur entassement diminuer, ce qui peut fragiliser la voie.



La conjecture de Képler enfin démontrée

Comment remplir un carton avec un maximum d'oranges ? Comment empiler des oranges (ou tout autre objet sphérique) de façon à obtenir un tas aussi compact que possible ? Élémentaire, répondez-vous ! Et presque machinalement vous commencez par les répartir sur la table, de façon à ce que chacune d'entre elles soit entourée de six autres et forme un hexagone régulier. Sauf sur les bords, bien sûr ! Puis vous répétez l'opération sur la couche supérieure en plaçant les oranges dans les « trous » laissés par les oranges de la couche précédente. Vous avez même l'impression que les oranges se placent d'elles-mêmes. Mais si vous êtes un observateur attentif, vous avez remarqué qu'un trou sur deux est resté vide. La troisième couche peut donc prendre deux configurations en se superposant ou non à la première. Pour les puristes, l'empilement se qualifie alors d'hexagonal compact ou de cubique à faces centrées. Mais ces précisions n'ôtent rien à l'évidence de la procédure que vous poursuivez jusqu'à épuisement du stock d'oranges.



Intuitivement on a du mal à envisager une autre méthode pour empiler des oranges (ou autres objets sphériques identiques) en laissant un minimum de vide. Avec raison puisque c'est effectivement la meilleure. Mais reste à le démontrer, et là l'affaire se corse.

Dès 1610, Képler, le célèbre mathématicien et astronome, formulait une conjecture sur la question. Il constatait qu'en procédant comme précédemment, « l'assemblage sera très serré, de sorte qu'ensuite aucune disposition ne permettra d'entasser un plus grand nombre de globules dans le même récipient. » Formulation anodine pour un problème qui l'est moins. Durant plus de quatre siècles des légions de mathématiciens vont s'y casser les dents. En 1901, le mathématicien David Hilbert le classe même, à l'instar de la célèbre conjecture de Fermat, parmi les grandes questions non résolues auxquels les mathématiciens doivent s'atteler pour le XX^e. Il faudra attendre l'année 1998, pour que les travaux de

Thomas Hales en apportent enfin la démonstration rigoureuse.

Mais pourquoi est-il si difficile de démontrer mathématiquement ce qui semble relever du vulgaire bon sens ? En fait, pour le mathématicien bien décidé à poser correctement le casse-tête de l'empilement, la procédure et le cadre de l'empilement sont bien plus complexes que ceux évoqués précédemment. Nous n'en signalerons que quelques-uns.

Pour éviter les effets de bords, là où on observe bien qu'une sphère jouxte un nombre de sphères inférieur à 12, il commence par se placer dans le cas idéal d'un nombre infini d'oranges.

Par ailleurs, nous avons envisagé d'empiler éventuellement les oranges dans une boîte. C'est bien plus pratique, le tas d'oranges ne s'effondre pas comme un château de cartes quand un petit malin choisit de déguster une orange au cœur de la pile ! Mais que savons-nous de la forme et de la taille de la boîte ? Pour réaliser la procédure précédente, il faut qu'elle soit cubique et que son côté soit un multiple du rayon de chaque sphère. Dans le cas contraire, secoué par le camion qui les transporte, les oranges auront bien du mal à rester dans l'empilement le plus compact. De plus, nous ne sommes plus dans le cas idéal d'un nombre infini d'oranges. Il serait aussi difficile de les faire entrer dans une boîte de dimensions finies que de disposer d'un tel stock ! Avis aux amateurs : la question de l'empilement optimal dans une boîte de forme quelconque n'est toujours pas résolue.

D'autre part, dans le cas d'un très petit nombre d'oranges, quatre par exemple, chacun sait réaliser un empilement plus dense que celui de la conjecture de Képler. Trois fruits disposés en triangle et le quatrième posé dessus réalisent un arrangement qui laisse moins d'espaces vides. Les centres de ces quatre sphères forment alors un tétraèdre régulier, c'est-à-dire un solide dont les quatre faces sont des triangles équilatéraux égaux. Un empilement constitué, totalement ou en majorité, par ce motif, démentirait la conjecture de Képler. L'un des axes du travail de Thomas Hales a été justement de démontrer que de tels empilements n'existent pas. Dès qu'on augmente le nombre de sphères, elles se « gênent » et le gain d'espace disparaît. Autrement dit, l'espace ne peut être pavé par des tétraèdres réguliers.

Thomas Hales, professeur de mathématiques à l'université du Michigan a travaillé dix années pour écrire la preuve de la conjecture de Képler, en ramenant le problème à l'analyse de « seulement » 5 094 types d'empilements (et non plus d'un nombre infini). Ce nombre suffit à engendrer des calculs titanesques,

effectués par un recours intensif à des ordinateurs super puissants. N'espérez pas télécharger la preuve intégralement sur votre ordinateur personnel. Elle totalise près de 300 pages dont certaines écrites avec son élève Samuel Ferguson, et l'ensemble des codes informatiques et des données nécessaires exige près de trois giga bits de mémoire.

Il faut aussi rendre à Laszlo Fejes Toth ce qui lui appartient ! En 1940, le mathématicien hongrois résout le problème dans le plan. On aurait pu l'appeler celui de la pièce de monnaie, à savoir qu'une pièce ne peut être « embrassée » par plus de six pièces identiques. Patent certes, mais la preuve a tout de même exigé quelques siècles de réflexion. En 1953, Laszlo Fejes Toth saute un cran et passe à la dimension 3. Il réussit cette fois-ci à réduire le problème de Képler d'un nombre infini à un nombre fini de types d'empilements. Par des constructions géométriques astucieuses, il ramène le problème à une question d'optimisation d'une fonction non linéaire de près de cent cinquante variables, et se cogne alors au mur de calculs impossibles. En dépit des avancées informatiques, cette optimisation échappe encore aujourd'hui à ce qu'il est possible d'envisager de calculer !

Thomas Hales s'est indéniablement inspiré de Toth et utilise des constructions géométriques voisines. Il se cantonne, comme évoqué précédemment à 5 094 types d'empilements et entreprend la très rude tâche de comptabiliser et évaluer les modes de pavage de l'espace par les solides formés par les centres des sphères.

Dans l'empilement de Képler, le volume est pavé par des tétraèdres réguliers contigus à des octaèdres réguliers (solide à huit faces équilatérales) sans espace vide. On observe que deux solides de même type ne s'y touchent jamais par une face. Précisons ! Le tétraèdre régulier est formé par les centres de quatre sphères empilées de manière optimale : trois sur un plan + une sur le plan supérieur dans l'espace vide. L'octaèdre, par les centres de huit sphères : quatre dans le plan + une sur le plan supérieur dans l'espace vide + une dans le plan inférieur dans l'espace vide.

En analysant ses 5 094 cas, Thomas Hales a montré que le pavage optimal de l'espace par des sphères accole bien huit tétraèdres à un octaèdre, comme dans l'empilement de Képler.



<http://www.math.pitt.edu/~thales/>

Thomas Hales a, entre autres, fait le bilan du pavage de l'espace par les « cellules de Voronoï ». La cellule de Voronoï associée à une sphère est constituée par l'ensemble des points qui sont plus proches du centre de la sphère considérée que du centre de toute autre sphère. Dans l'empilement de Képler, la cellule de Voronoï est un solide limité par douze losanges, le rhombododécaèdre. On peut en paver l'espace sans laisser de vide. Plus réduite et plus dense serait une cellule de Voronoï en forme de dodécaèdre régulier (formé par douze pentagones réguliers). Le hic, on ne peut en paver l'espace sans laisser de vide. Thomas Hales a aussi étudié les polyèdres formés par les centres de sphères voisines. Les modes de pavages sont alors loin de l'évidence de l'empilement de Képler et de "toujours moins dense".

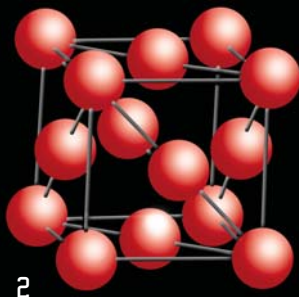
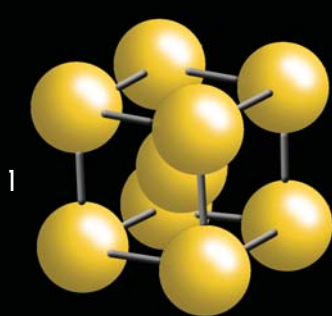
Par le recours à des méthodes combinatoires complexes, Thomas Hales réussit à convertir le problème non linéaire de Toth en une question d'optimisation linéaire, traitable cette fois-ci par ordinateur. Au prix tout de même de la résolution de plus de 100 000 problèmes linéaires de 100 à 200 variables et 1 000 à 2 000 pour chacun d'entre eux !

- Empilement cubique simple

Considérons un cube élémentaire de côté a .

Chaque sphère, de rayon $r = a/2$, est à cheval sur huit cubes.

Chaque cube contient donc 8 huitièmes de sphère, soit l'équivalent d'une sphère de volume $\pi a^3/6$, ce qui correspond à une densité d'empilement de $\pi/6 = 0,5236$.



- Empilement cubique centré [1]

La densité précédente s'améliore en espaçant les sphères de façon à insérer une sphère supplémentaire au centre de chaque cube. La grande diagonale du cube de longueur $a\sqrt{3}$ est égale à $4r$. Donc $r = a\sqrt{3} / 4$. Le cube contient 8 huitièmes de sphère + une sphère située en son centre, soit 2 sphères de rayon r . D'où la densité d'empilement, $\pi\sqrt{3} / 8 = 0,6802$.

- Empilement cubique à faces centrées [2]

Dans ce cas, le cube élémentaire contient 6 demi-sphères centrées au centre de chaque face et 8 huitièmes de sphères centrées aux sommets, soit 4 sphères. Le rayon r de chaque sphère, demi-distance entre un sommet et le centre d'une surface attenante, vaut $a\sqrt{2} / 4$. La densité égale à $\pi/\sqrt{18} = 0,7405$ est maximale et correspond à l'empilement de Képler.

- Empilement hexagonal compact

On empile des couches de sphères disposées en hexagone, chaque couche étant décalée par rapport à ses voisines. La densité est là encore maximale, $\pi/\sqrt{18} = 0,7405$.

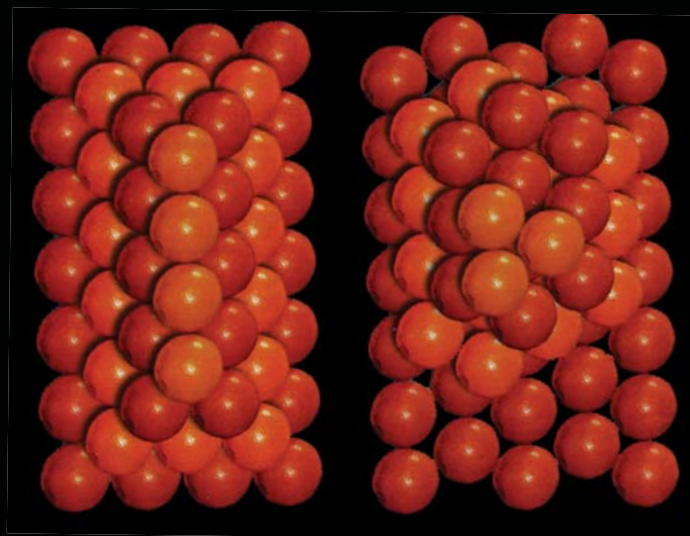
Du tas d'oranges aux codages informatiques

Les empilements de sphères servent aussi à élaborer des codes de transmission et de reproduction efficaces de données informatiques.

Un codage informatique est une suite de 0 et de 1 de longueur n qui permet de détecter et parfois de corriger une erreur de transmission. Lorsqu'une erreur se produit, un code valide devient invalide, ce qui permet de retrouver l'erreur. Si par chance il n'existe qu'un seul code valide suffisamment similaire au code invalide reçu, on peut retrouver sa valeur correcte sans avoir à transmettre les données à nouveau. Ces codages informatiques sont donc plus que bienvenus en matière de télécommunications.

Si on se place dans l'espace à n dimensions $\{0,1\}^n$, écrire le bon codage informatique revient à trouver des points de cet espace suffisamment éloignés les uns des autres. C'est là que les empilements de sphères apportent leur aide.

En effet, une suite de points dans l'espace à n dimensions dont les coordonnées sont toutes 0 ou 1, peut être associée à une famille infinie de points éloignés les uns des autres par le procédé de *périodisation*. Il consiste à leur adjoindre tous les points dont les coordonnées diffèrent d'un facteur 2. En plaçant des sphères aussi grosses que possibles au centre de chacun de ces points on obtient un empilement. En règle générale, plus le codage considéré est performant, plus l'empilement des sphères est dense.





Pour en savoir plus

Sur le web

<http://membres.lycos.fr/villemingerard/Geometrie/SpheEmpi.htm>

[Des chiffres et des expériences vues dans l'exposition « Jeux de grains »]

<http://irem.u-strasbg.fr/irem/ouvert/Duvert104Pdf/Baumann1.pdf>

[Le théorème décrit par Olivier Baumann, Univ. Pasteur Strasbourg]

www.dma.ens.fr/culturemath/maths/pdf/geometrie/empilement.pdf

[Empilements et cristaux par Denis Auroux, CNRS - École Polytechnique]

<http://www.univlemans.fr/enseignements/chimie/01/deug/sem2/metaux.html>

[Sur les empilements cristallographiques]

en anglais

www.sciencenews.org/articles/20040214/fob7.asp [Empilements de smarties]

<http://www.math.pitt.edu/~thales/> [Le site de Thomas Hales]

Dans les livres et périodiques

• Encyclopædia Universalis

• *La sphère sous toutes ses formes*, Dossier Pour La Science, Éditions Belin, Paris 2003

• Joseph Oesterlé, *Densité maximale des empilements de sphères en dimension 3*, d'après Thomas C. Hales et Samuel P. Ferguson, Séminaire Bourbaki n° 863, juin 1999

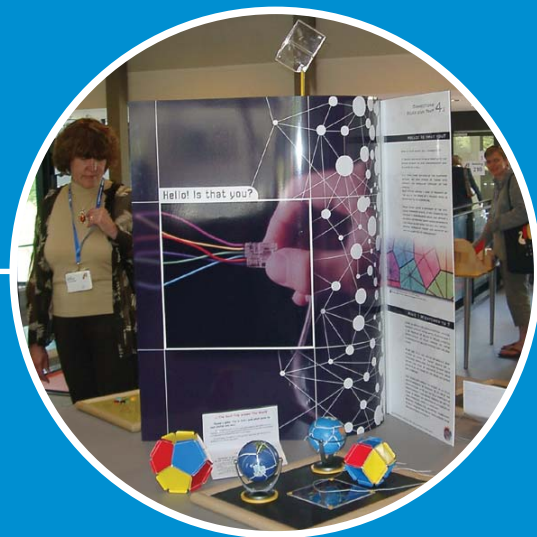
en anglais

• George G. Szpiro, *Kepler's Conjecture*, John Wiley & Sons, 2003

• N.J.A Sloane, *The Sphere Packing Problem*, Documenta Math., Extra Volume ICM 1998, III, 387-396

Téléphone fixe : liaisons fatales

4 - Relier d'un Trait - Graphs & Connections



L'important, c'est le réseau ! Aussi fabuleuse soit-elle, l'invention du téléphone fixe serait tombée dans les oubliettes de l'histoire, s'il n'avait pas été possible de relier les postes entre eux, d'un bout à l'autre de la planète. Les réseaux téléphoniques sont devenus des labyrinthes d'apparence inextricable, et pourtant opérationnels. La théorie des graphes, les probabilités, la géométrie et le calcul informatique, plusieurs domaines mathématiques se sont unis pour construire et démêler le dédale.

Allô, c'est toi ?

Les mathématiques jouent les Ariane pour tisser et décrypter la toile du gigantesque réseau qui relie tous les téléphones fixes du globe.

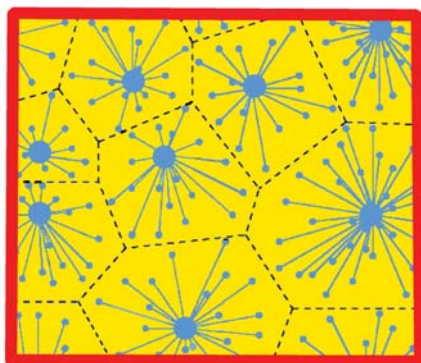
Simple comme un coup de fil ? Pas tant que cela. L'usage du téléphone fixe est devenu si courant, qu'il masque la complexité du réseau qui relie tous les abonnés au téléphone de la planète. Et personne ne s'étonne plus, simplement après avoir pianoté quelques chiffres sur son téléphone, d'entendre un interlocuteur lui répondre ou encore un répondeur se mettre en marche. On en oublierait presque que dans certaines régions de France, les demoiselles des téléphones ont relié à la main tous ceux qui cherchaient à se parler via un combiné jusqu'à la fin des années 1970. C'est seulement à cette date que le réseau téléphonique français devient intégralement automatique... et que le téléphone se démocratise et entre enfin dans la plupart des foyers. Les standards d'hôtel avec leur petit tableau commutateur ou les actuels interphones d'immeuble donnent une idée des premiers réseaux de téléphones.



Les mathématiques coupent les fils en quatre

Au début, le nombre d'abonnés est suffisamment restreint pour les raccorder physiquement par des câbles les uns aux autres. Mais pour chaque nouvel abonné, il faut installer des lignes vers tous les autres. Cette approche est très vite devenue impraticable. La solution trouvée consiste à relier chaque abonné par une seule ligne vers un centre de commutation où des opératrices, choisies à l'époque pour leur moralité au-dessus de tout soupçon, établissaient les connexions, entre abonnés d'un même secteur, ou entre l'abonné et l'opératrice du secteur dont dépend la personne appelée. Les différents centraux sont reliés par des câbles, comme ils le sont aujourd'hui, d'ailleurs. Pour la petite histoire, des concours d'efficacité étaient organisés pour améliorer la qualité du service. Le record frôlait les 400 connexions par heure, ce qui correspond à une communication toute les dix secondes... Heureusement, ce métier bien répétitif n'existe plus ! Les étapes de connexion sont désormais automatiques, via des commutateurs électroniques, mais grosso modo, le principe est resté le même.

Fig. 1 - Pavage de Voronoï



- – Les commutateurs
- – Les abonnés
- les câbles
- Les frontières des zones de raccordement

Aujourd'hui, chaque fois que je passe un coup de fil, ma demande est transmise par des câbles au commutateur téléphonique le plus proche de mon domicile. Tous les commutateurs de la région sont reliés entre eux et se passent l'information de proche en proche jusqu'à arriver au commutateur le plus proche du domicile de mon correspondant.

Ce dernier relais va « ordonner » à son téléphone de sonner.

Mais les opérateurs du téléphone sont confrontés à plusieurs problèmes. En premier lieu, un commutateur ne peut pas gérer un trop grand nombre d'appels simultanés et il est difficile de déterminer le nombre de fils dans les câbles interurbains reliant les centres de commutation. La modélisation mathématique du réseau et le recours aux statistiques et aux prévisions du trafic permettent aux opérateurs des télécommunications de mener à bien leur mission... même si, de temps à autre, une voix suave martèle, *par suite d'encombrements, nous ne pouvons donner suite à votre appel !*

Pour la construction du réseau, et la détermination du nombre de fils des câbles, la priorité est donnée aux communications locales. En effet, les abonnés communiquent surtout avec des abonnés proches géographiquement, puis avec des abonnés d'une autre localité du même pays. En dernier, viennent les communications internationales. On appelle *commutation de circuits* le système qui consiste à relier deux postes par un *circuit* composé de plusieurs morceaux de fils. Et lors d'une conversation, même si vous restez muet comme une carpe, vous mobilisez un circuit entier. L'opérateur doit anticiper pour que ces circuits soient gérés de façon optimale et que le réseau dispose d'une géométrie variable, pour affronter les besoins futurs. S'il faut rajouter des commutateurs, où devra-t-il le faire, et en quel nombre ? Le domaine des mathématiques qui permet de construire un tel réseau s'appelle la théorie des graphes. [cf. encadré]

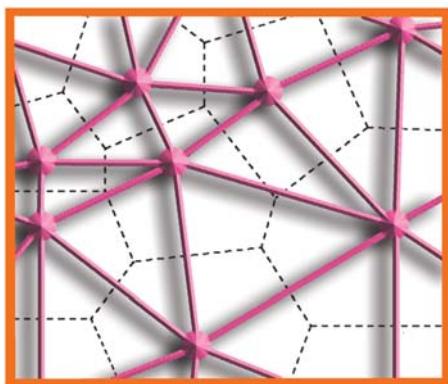
Plaçons nous dans le cadre d'une ville puisque les communications locales sont les plus nombreuses et considérons un modèle réaliste de celle-ci, en l'occurrence, son plan. On choisit de placer les commutateurs téléphoniques au hasard sur la carte ! En effet, si on avait préféré les disposer de manière précise, en respectant la topologie préexistante des rues, on se retrouverait devant un nombre si imposant de paramètres qu'on ne pourrait plus faire aucun calcul sur le modèle obtenu. Paradoxalement, en mathématiques, il est parfois plus simple

de faire des calculs avec un ensemble de points répartis aléatoirement, à condition de leur imposer globalement certaines règles. Les règles qui suivent permettent de définir le « modèle mathématique » du réseau sur lequel les opérateurs du téléphone vont pouvoir œuvrer.

Quelles sont-elles ? N'importe quel abonné est supposé pouvoir téléphoner à n'importe quel autre, n'importe quand. Donc, quelle que soit sa position dans la ville, un abonné doit avoir autant de chances de rencontrer un commutateur dans un rayon de 100 mètres, par exemple. Lorsqu'il se promène le long d'une rue, le nombre moyen de commutateurs est proportionnel à la longueur de la rue. Enfin, ce n'est pas parce qu'il habite tout près d'un commutateur que son ami a moins de chances d'en avoir un, tout près de chez lui.

Répartissons maintenant les utilisateurs de lignes. A un instant t , on ne peut pas savoir où se trouve chaque personne qui téléphone. On va donc les disposer, elles aussi, au hasard sur la carte de la ville, en leur imposant les mêmes conditions sur l'aléatoire que pour les commutateurs. Mais on suppose, de plus, que les positions des personnes sont indépendantes des positions des commutateurs.

Fig 2- Triangulation de Delaunay



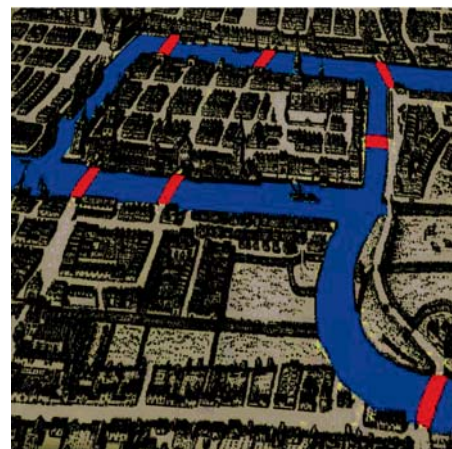
- Les commutateurs
- Le réseau de commutateurs
- Les frontières des zones de raccordement

La répartition précédente des commutateurs et des abonnés produit deux découpages géométriques du plan de la ville, distincts, et réalise, en première approximation, le réseau téléphonique de l'agglomération.

Ainsi, chaque commutateur dessert une zone précise de la ville, où chaque abonné est plus proche de ce commutateur que de n'importe quel autre. Cette zone dite de raccordement est délimitée par les médiatrices des segments reliant ce commutateur à chacun des autres. Chaque zone est donc associée à un polygone convexe dont l'ensemble fournit un pavage du plan de la ville, appelé mosaïque de Voronoï [Fig. 1].

Par ailleurs, si on relie tous les commutateurs voisins, le plan est alors pavé par une autre mosaïque dite triangulation de Delaunay [Fig. 2]. Lorsque je téléphone, mon appel est transmis au commutateur qui gère la zone de raccordement dans laquelle je me trouve. Les deux découpages précédents optimisent le chemin que doit suivre mon appel avant d'arriver chez mon correspondant. Les commutateurs communiquent le long des câbles représentés par la mosaïque de Delaunay jusqu'à ce que le message atteigne la zone dans laquelle se trouve mon correspondant.

Actuellement, des mathématiciens étudient des modèles de graphes plus complexes, pour les besoins de la téléphonie mobile entre autres, où pavages de Voronoï et triangulation de Delaunay varient de manière aléatoire. Les mathématiques ne cessent de jouer les Ariane pour que téléphoner soit simple comme un coup de fil !



Les 7 ponts de Königsberg

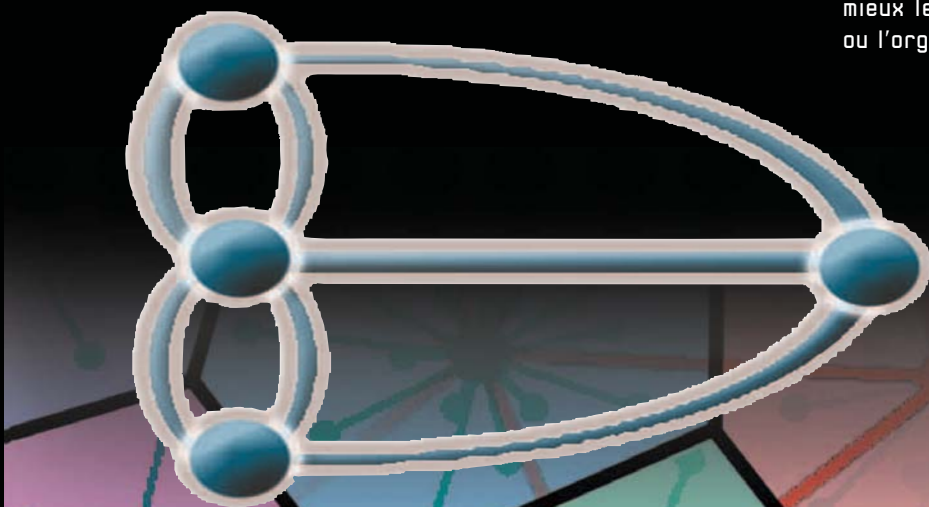
Sept ponts accouchent d'une théorie

Au début des années 1700, les habitants de Königsberg, ville portuaire de la Prusse orientale située à quelque 250 km au nord de Varsovie, se posaient d'étranges questions.

Ils se demandaient si un promeneur pouvait parcourir la ville (aujourd'hui Kaliningrad en Russie) en passant une fois et une seule par chacun de ses ponts et en revenant à son point de départ. Königsberg comportait alors sept ponts, reliant les quatre parties de la ville définies par le tracé de ses eaux. Les habitants ont usé leurs semelles en vain jusqu'à ce que le grand mathématicien suisse Euler s'empare de la devinette.

La réponse est : non, il est impossible d'effectuer un tel circuit. Un tel chemin existe si un nombre pair de chemins arrive à chaque point, à l'exception éventuelle du point de départ et d'arrivée. Un promeneur qui arrive à un sommet doit en repartir par un pont différent de celui par lequel il est arrivé. Dans le graphe, cela se traduit par le fait qu'à un sommet doit être associé un nombre pair d'arêtes. Or la configuration des ponts de Königsberg ne vérifiait pas cette condition. Avec la résolution de ce problème naissait une nouvelle discipline mathématique, la théorie des graphes dont l'importance n'a pas cessé de croître.

Cette théorie n'intéresse pas que les purs mathématiciens. Notre vie quotidienne baigne dans ces graphes qui permettent, par exemple, de représenter des circuits électroniques, de gérer au mieux le trafic routier, les tâches d'un processus de fabrication ou l'organisation du réseau téléphonique.





Pour en savoir plus

Sur le web

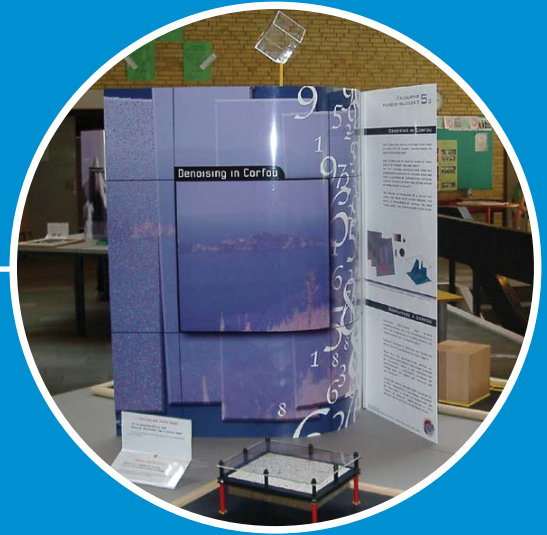
www.l211.com/tel4.htm [histoire du téléphone]

Sur papier

Article «*Théorie des graphes* » dans *Encyclopædia Universalis*
 Claude Berge, *Théorie des graphes et ses applications*, Gauthiers-Villars. Paris, 1957
 Géométrie algorithmique, Mariette Yvinec & Jean-Daniel Boissonnat. Ediscience, Paris 1995
 Raoul Raba, *Le secret des pavages*, Adecum-Centre-Sciences. Orléans, 1990

Des images très calculées !

5 - Pourquoi calculer ? - Calculating



Nous vivons dans un monde baigné par les images numériques. Mais de l'image vraie à l'image restituée, le parcours est semé d'embûches. Les images subissent de nombreux traitements mathématiques avant de faire bonne figure, souvent sans que l'utilisateur ne s'en rende compte. Le traitement numérique des images, et de l'information au sens large (les sons par exemple), est un domaine de recherche dont l'importance explose, avec une large panoplie d'équations mathématiques, d'astuces de codage de l'image sous forme de lignes de niveau et de théories récentes, comme la théorie des ondelettes.

Débruitage à Corfou

Qui aurait cru qu'une image fasse du bruit ? Que le moindre de ses petits défauts, tâches ou flou, prenne de la hauteur, comme le ferait un son ?

Pour la rendre silencieuse, autrement dit lisse comme une image, on la débruite et on s'en remet à des équations aux dérivées partielles, comme l'équation de la chaleur.

Pour une image en noir et blanc, cela revient à considérer que tous les points sont interdépendants. Le niveau de gris de chaque point est alors une moyenne pondérée des niveaux de gris des points voisins. Cette approche s'étend facilement aux images en couleur.

Talon d'Achille de la méthode, les bords et les contours, qui deviennent plus flous encore. On y remédie en utilisant des lissages qui n'emploient pas tous les points voisins.



Du flou au lissage : équations pour un lifting

Nous vivons sous l'emprise des images, du numérique et des télécommunications. Mais sans traitement mathématique approprié, une grande partie des images reproduites ou retransmises serait de piètre qualité.

Une sonde envoie des images de la planète Mars, que vous suivez en temps réel, parfaites et émouvantes, sur la planète Terre, face à un écran de télévision. Via des webcams, des acteurs de télé-réalité en mal d'inspiration, font partager leur vie rêvée, sublimée seconde par seconde sur votre ordinateur. Armé de son micro appareil de prise de vue numérique, un paparazzi, méchant comme il se doit, vole, avec la rapidité de l'éclair, le portrait d'une star surprise en nouvelle compagnie aux Îles Caïmans ou à Corfou.



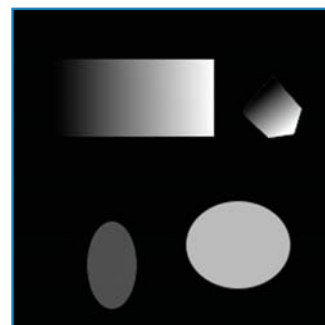
Une image de Corfou débruitée

Il s'empresse de l'envoyer depuis son téléphone portable dernier cri à la rédaction parisienne de son magazine. Demain, elle fera la Une. On y discernera, de façon « très nette », l'intensité des regards et même la couleur du vernis à ongles !

Pourtant, de l'image « vraie » à l'image « restituée », le parcours est semé d'embûches. Le plus souvent, les images doivent supporter des conditions perturbantes, avant leur apparence finale. Certaines voyagent dans l'espace dans des conditions extrêmes, sous le bombardement des rayons cosmiques. Elles restent soumises à l'éventuelle maladresse du photographe qui laisserait des poussières s'accumuler sur l'objectif ou encore à la mauvaise qualité de transmission ou de réception via Internet des données numériques qui la définissent...

Elles ont souvent été « compressées », c'est-à-dire transformées après numérisation de façon à occuper une place moins grande avant leur transmission. Reste à les traiter après réception pour leur redonner toute leur « fraîcheur » initiale, voire les améliorer.

Outre la compression et la restitution d'images, le traitement d'images concerne la restauration de photos, de films anciens ou de toute image dont une partie des informations est perdue ou non disponible, l'analyse de photos aériennes ou satellitaires, la vision des robots, l'imagerie médicale, la reconnaissance automatique de l'écriture, la détection de défauts dans les composants industriels, etc.



Une image /
en niveau de gris

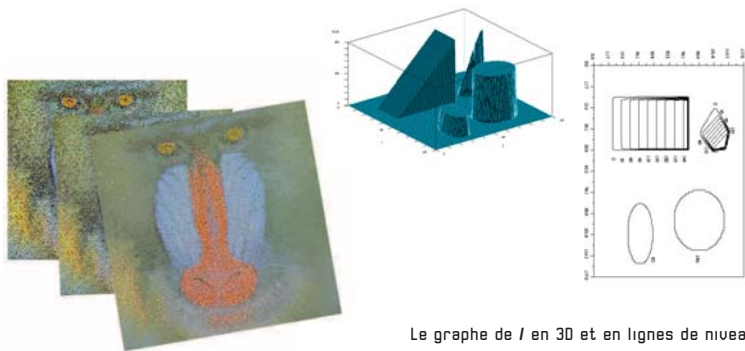
Retrouvons notre magazine « people ». L'iconographe a reçu le portrait de la star sur son ordinateur, image qui lui est parvenue affublée du logo JPEG-2000. Ces initiales désignent, historiquement, un groupe d'experts internationaux, le *Joint Photographic Expert Group*, qui planche sur les normes d'échanges de fichiers images. Dans la foulée, JPEG désigne aussi la norme de compression d'images la plus couramment rencontrée sur Internet, surtout sous sa dernière version, JPEG-2000... produit des recherches de mathématiciens français !

Considérons une image numérisée. Elle est constituée de 512×512 points [pixels], dont les niveaux de gris peuvent varier de 0 [noir] à 255 [blanc]. [Pour les images en couleur, on associe à chaque point trois valeurs qui correspondent au niveau du rouge, du vert et du bleu]. Chacun des 256 niveaux de gris possibles peut être représenté par un octet, c'est-à-dire un nombre binaire constitué de 8 bits, [0 ou 1]. Coder cette image exige $512 \times 512 \times 8 = 2\,097\,152$ bits, ce qui est bien gourmand. On peut diviser ce nombre par 8, en se contentant de deux valeurs pour le niveau de gris, blanc ou noir, codées en 0 ou 1. L'image qui en résulte est sacrément dégradée. Pourtant, par JPEG-2000 [logiciel intégré dans l'ordinateur], l'image est 32 fois moins codée, avec pourtant une dégradation imperceptible. Au lieu de réduire la précision, c'est le mode de « hiérarchisation » de l'information visuel qui est chamboulé. L'idée forte de cette approche est que l'information visuelle est *hiérarchisée à travers les échelles*. Un exemple

simple : en partant d'une image digitale, on peut moyenner les niveaux de gris sur des carrés de 2×2 pixels, puis 4×4 pixels puis 8×8 pixels, etc. Pour chaque image «approximative» ainsi obtenue, celle de niveau deux fois plus fin se déduit du niveau immédiatement inférieur. On peut donc la reconstruire, «pas à pas», jusqu'à remonter à l'image initiale... ou presque.

Des décompositions de ce type ont été introduites dans les années 1970 pour les besoins de la prospection pétrolière française. Un ingénieur-géophysicien très ingénieux, Jean Morlet, développe une méthode mathématique, «la transformée en ondelettes», pour étudier le sous-sol. Dans les années 1980, Yves Meyer s'en empare et l'améliore, pour les besoins de l'imagerie, bientôt relayé par une foultitude de chercheurs, dont Stéphane Mallat et Ingrid Daubechies.

Leurs travaux ont donné vie au standard JPEG-2000. Ainsi, derrière la plupart des images échangées sur Internet, voyage un peu de la recherche mathématique française.



Le graphe de I en 3D et en lignes de niveau

Retrouvons, une fois de plus, l'iconographe du magazine «people». Il [ou elle] a donc reçu la photo sous format JPEG-2000. Hélas, elle est inexploitable, floue par endroits, parsemée de petites tâches ! Ces petites imperfections d'une image numérique sont appelées bruits. Le photographe a des excuses, il a pris la photo très vite, alors que la star lui jetait son verre [d'eau] en direction de l'objectif ! L'iconographe ne panique guère. Il actionne sur ordinateur un logiciel très courant sur le marché et «débruite» en un rien de temps, quelques secondes tout au plus, l'image. Imperfections gommées, lissage, l'image est nette et exploitable. Comment est-ce possible ?

Plusieurs méthodes de débruitage sont possibles. Par exemple, on peut modéliser l'image à traiter, c'est-à-dire la décrire

autrement, sous une forme propice à son traitement ultérieur. Ainsi, au lieu d'associer à chaque point $[x,y]$ de l'image, son niveau de gris $I[x,y]$, on dessine le graphe de la fonction à deux variables $[x,y]$. Cela revient à associer à chaque point «l'altitude» de son niveau de gris. L'image numérique à traiter se retrouve transformée sous forme d'un ensemble de lignes de niveaux, et prend l'allure d'une surface qui ressemble à un relief de montagnes. Les cartographes utilisent de telles représentations pour établir des cartes topographiques. Cette représentation permet d'obtenir assez facilement des algorithmes performants de traitement.

L'image numérique à traiter, transformée éventuellement en lignes de niveau, est considérée comme une fonction I_0 qui, à chaque point $[x,y]$ de l'image, associe la hauteur de son niveau de gris. Débruiter, consiste, à partir de la fonction I_0 , à trouver la fonction I , représentant une image plus lisse.

On suppose donc que la fonction I dépend de trois variables, x et y [comme I_0] et une troisième variable exprimant le degré de lissage, t . Pour l'image de départ, $t = 0$.

On peut considérer en première approximation que le niveau de gris de chaque point est une moyenne pondérée des niveaux de gris voisins. C'est le mode de lissage le plus simple, calqué sur l'équation de la diffusion de la chaleur. De la même façon que, dans un matériau, la chaleur se diffuse d'un point à un autre, de proche en proche, et tend à se répartir uniformément, on peut imaginer faire «diffuser» les niveaux de gris de proche en proche. Ainsi les grandes variations de niveau de gris s'amenuisent et le niveau de gris global est plus uniforme, comme si on avait gommé les petites imperfections de l'image.

Mais, comme pour la compression d'images, [voir encadré], le bât blesse sur les bords ! La méthode de lissage précédente rend les bords et les contours plus flous ! Les mathématiciens ont donc modifié l'un des termes de l'équation de la chaleur de façon à ce que la diffusion ne s'effectue pas au niveau des contours. Ils ont remplacé un de ses membres par une expression faisant intervenir le gradient de la fonction I , qui mesure son degré de variation et sa direction [le gradient est un vecteur dont les composantes sont les dérivées partielles de I par rapport aux variables x et y]. Le résultat souhaité est une diffusion anisotrope, c'est-à-dire qui ne s'effectue pas de la même façon dans toutes les directions. Les images ainsi «liftées» ne font presque plus de «bruit», à en devenir «mathémagiciennes».



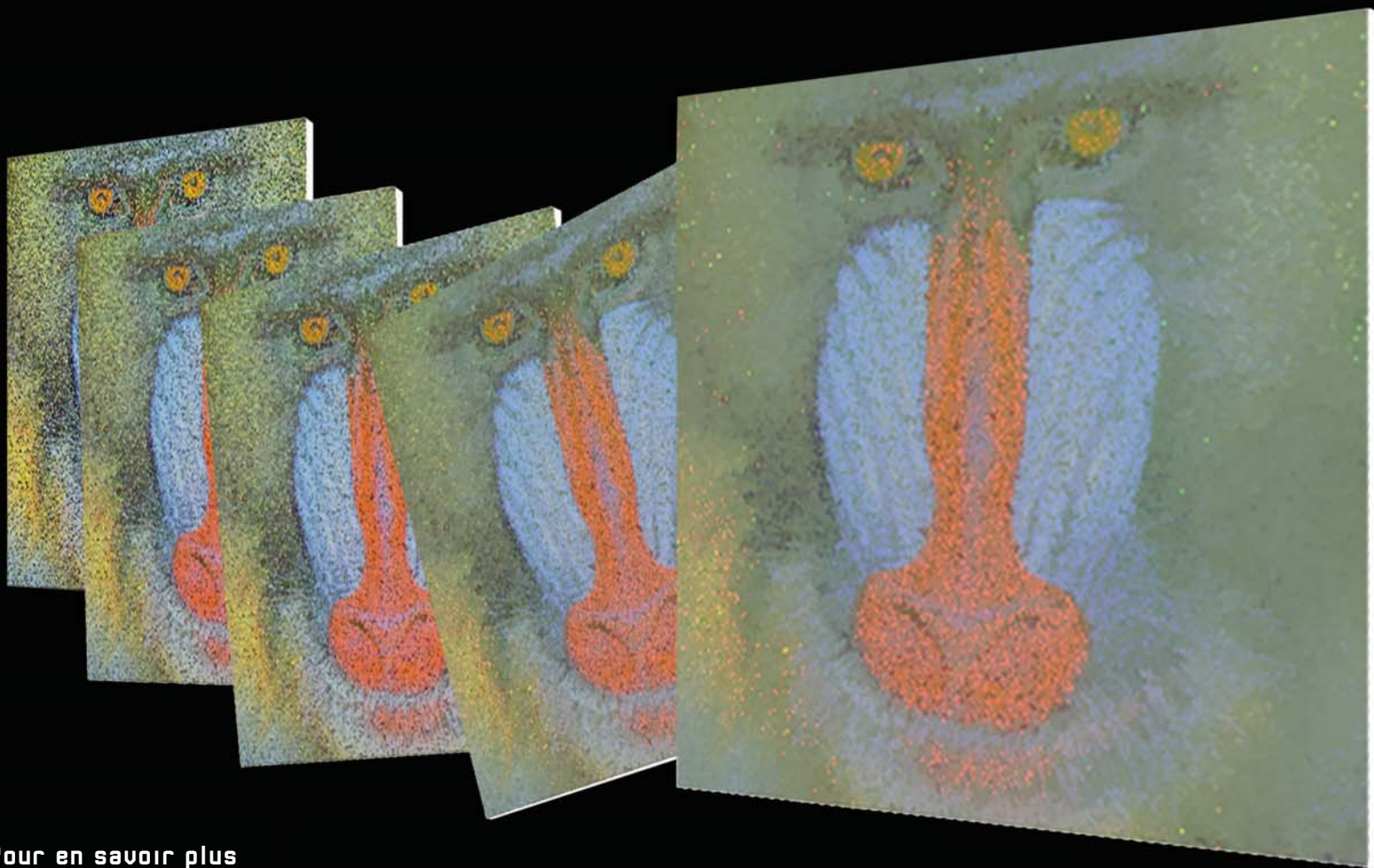
Mars © Nasa-Esa

1

Des ondelettes aux bandelettes

Quatre jeunes mathématiciens issus du Centre de mathématiques appliquées de l'École polytechnique ont récemment concocté la « théorie des bandelettes », à la base du nouveau format de compression Let It Wave. La méthode consiste à comparer des séries d'images et à utiliser des structures géométriques qui se répètent, par exemple le contour des yeux. L'essentiel de

l'information se trouve dans des « bandelettes » étroites, autour des contours. Une photographie d'identité codée sur seulement 500 octets est alors nette avec le format Let It Wave et floue avec JPEG-2000. Bientôt, votre photo d'identité tiendra sur une carte à puce ou sur un code-barre. Et de la vérification de cartes d'identité aux cartes d'accès aux aéroports, les applications vont proliférer dans les mois qui viennent.



Pour en savoir plus

Sur le web

<http://www.letitwave.fr/> [Nouveaux travaux sur ondelettes, en anglais]

Dans les livres

- Stéphane Mallat, Une exploration des signaux en ondelettes, Éditions de l'École polytechnique. Paris, 2000.
- Yves Meyer, Ondelettes et algorithmes récurrents, Ed. Hermann. Paris, 1992.

En anglais

- A. Cohen et B. Mattei, Nonlinear subdivisions schemes : applications to image processing, Tutorial on multiresolution in geometric modelling, A. Iske, E. Quack and M. Floater Ed., Springer, 2002.
- Total Variation Minimization for Scalar & Vector Image Régularisation, F. Dibos, G. Kœpfner et Pascal Monasse, in Geometric Level Set Methods in Imaging, Vision and Graphics, Ed. S. Osher et N. Paragios, Springer Verlag, 2003.

La Courbe des Autoroutes

6 - Construire - Constructing



Personne ne s'étonne qu'un TGV lancé à vive allure ne donne aucun haut le cœur lorsque son tracé aborde une courbe. On ne chavire pas d'un bord à l'autre de la rame sous l'effet d'une accélération intempestive. On peut même lire sans souci ce catalogue ! Le train reste bien sur ses rails sans dérapages incontrôlés. Il ne déforme pas. Il ne s'écrase pas sur le sol. Ouf !

De même, un conducteur peut sortir d'une autoroute sans à coup, avec une fluidité digne d'un chauffeur de maître, sans s'agripper à son volant ou lutter contre la force centrifuge qui devrait logiquement l'assailir.

Si ces déplacements sont devenus de « longs fleuves tranquilles », c'est grâce à une jolie spirale, celle de Cornu, également appelée clothoïde.

Entrée et sortie pas « bisCornues »

Quand un automobiliste entreprend de sortir d'une autoroute, il doit réduire sa vitesse progressivement, puis modifier sa direction. La solution la plus confortable pour le pilote consiste à lui proposer une courbe qu'il puisse suivre à vitesse constante en tournant le volant à vitesse constante : il décrit alors une portion de spirale. En revanche, quand l'automobile entre sur l'autoroute, elle sort d'une spirale dont la courbure diminue graduellement jusqu'à la lancer sur une trajectoire en ligne droite. Elle s'intègre alors « sans stress » au flot de la circulation existante.



La Clothoïde, ou la spirale de la tranquillité

Pour réduire les accidents quelles courbes utiliser dans la construction des autoroutes, des bretelles de raccordement, des voies ferrées ou des pistes de rollers ? La spirale de Cornu appelée également clothoïde apporte depuis peu la solution.



Contrairement aux idées reçues, les courbes utilisées pour construire les autoroutes et les lignes de TGV ne sont pas uniquement constituées de droites et d'arcs de cercles. Supposons en effet que la route soit mal faite, et qu'un arc de cercle de rayon r succède subitement à une portion de ligne droite. L'accélération du véhicule s'y déplaçant à la vitesse constante v passerait brutalement d'une valeur nulle à la valeur v^2 / r . Les passagers s'en trouveraient grandement secoués, la carrosserie soumise de dangereuses contraintes, et les accidents plus nombreux.

Idéalement, lorsqu'il aborde un virage, il faudrait que le véhicule continue à rouler à la même vitesse sans que le conducteur ait besoin de lutter contre son volant. Ce dernier tourne le volant à vitesse constante. La seule trajectoire qui réponde à cette si recherchée « constance » est une spirale, la clothoïde.

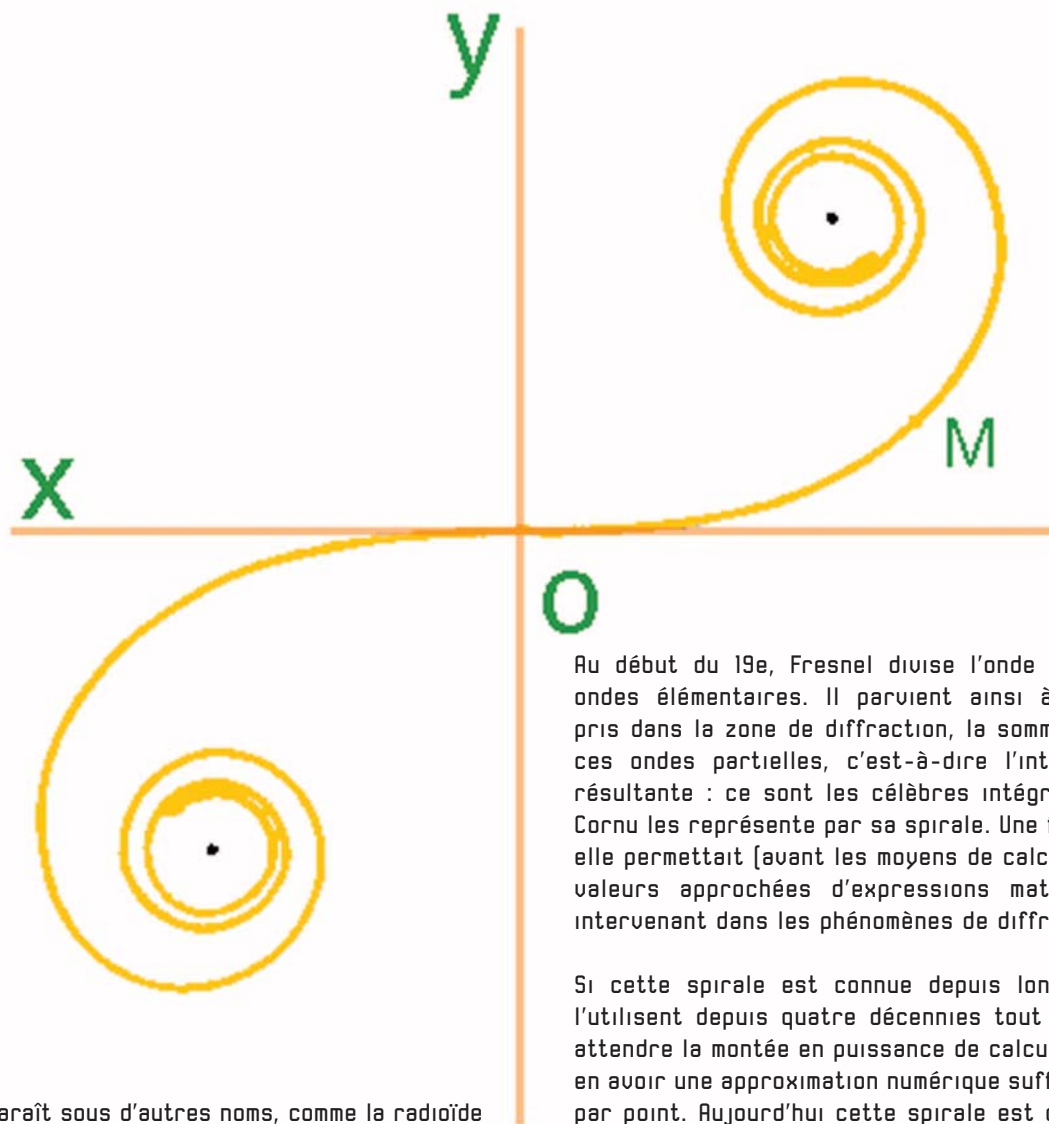
Pour gagner ce pari, les ingénieurs réalisent les raccordements en utilisant des portions de courbes qui permettent de passer progressivement d'une courbure nulle à une courbure donnée ou réciproquement. Ils vont donc juxtaposer des portions de cercles infiniment petits. Rappelons que la courbure d'une droite est nulle et celle d'un cercle égale à $1/r$, r étant le rayon du cercle. On peut étendre cette notion à une courbe lisse quelconque : parmi tous les cercles qui sont tangents à la courbe en un point P , certains, de rayons très grands, sont tangents extérieurement, d'autres, de rayons très petits, sont tangents intérieurement. Entre ces deux familles, il existe un cercle tangent qui traverse la courbe.

C'est celui qui approche le mieux la courbe au point P . Son rayon est le rayon de courbure de la courbe en ce point.

Revenons à la construction de la courbe idéale pour le conducteur ou le fou de rollers. Mises bout à bout, les portions de cercles infiniment petits répondant aux impératifs précédents engendrent une portion de spirale, appelée clothoïde ou spirale de Cornu. La force centrifuge subie par un observateur circulant de façon continue le long de cette courbe variera continûment, ce qui n'est pas le cas dans un raccord cercle-droite. On peut en admirer la forme dans les photographies aériennes d'échangeurs autoroutiers. On la voit décrire une spirale à deux pôles qui devient de plus en plus serrée à mesure que l'on s'éloigne de l'origine, comme le feraient les ressorts d'une montre mécanique. D'autres y ont vu la forme du fil qui s'enroule sur un rouet. Elle en a tiré son nom, puisque clothoïde vient du grec *klothēin* [filer]. Et pour la petite histoire, Clotho était celle des trois Parques qui filait la destinée des hommes avec un fil nommé le temps. Ici, l'un des pôles s'enroule dans un sens et le second en sens inverse... Toute une philosophie, celle du temps qui s'écoule et du temps qui se remonte en arrière !

Les Trois Parques - Marco Bigio. Palais Barberini, Rome





Dans l'histoire, elle apparaît sous d'autres noms, comme la radioïde aux arcs, la spirale d'Euler ou la spirale de Fresnel. Mais le premier à s'être penché sur elle ne lui a pourtant pas prêté son nom. Jacques Bernoulli l'étudie dès 1705 pour ses travaux en optique. Ce grand amateur de spirales tout azimut clame son amour pour ces courbes jusque sur son tombeau, ornée d'une spirale logarithmique.

Le physicien français Alfred Cornu [1841-1902] introduit la courbe qui porte son nom pour représenter les intégrales de Fresnel à l'occasion de ses travaux sur la diffraction de la lumière.

Au début du 19e, Fresnel divise l'onde lumineuse incidente en ondes élémentaires. Il parvient ainsi à évaluer, en un point pris dans la zone de diffraction, la somme des contributions de ces ondes partielles, c'est-à-dire l'intensité de la vibration résultante : ce sont les célèbres intégrales de Fresnel. Alfred Cornu les représente par sa spirale. Une fois tracée arc par arc, elle permettait (avant les moyens de calculs actuels) d'avoir des valeurs approchées d'expressions mathématiques complexes, intervenant dans les phénomènes de diffraction.

Si cette spirale est connue depuis longtemps, les ingénieurs l'utilisent depuis quatre décennies tout au plus. Il leur a fallu attendre la montée en puissance de calculs des ordinateurs pour en avoir une approximation numérique suffisamment précise, point par point. Aujourd'hui cette spirale est donc devenue la courbe préférée des ingénieurs chargés de nos chaussées « high tech » et aussi... celle des robots. La clothoïde intervient aussi dans le calcul du plus court chemin reliant deux points. Un robot situé au point A, doit atteindre le point B. S'il regarde dans une autre direction, il ne fait pas volte-face ! Ce serait trop dangereux pour lui. Son chemin se construit par la juxtaposition de petites portions de clothoïdes. Certes, quand il regarde vers B, l'affaire est plus simple puisqu'il lui suffit d'emprunter le segment de droite AB. Si les robots, eux aussi, aiment la clothoïde... !

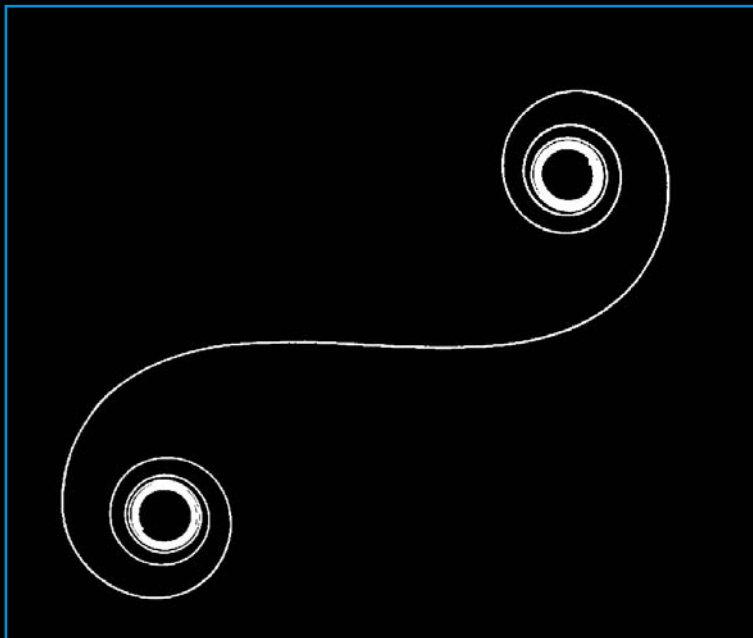
Équation pour une courbe admirable

1

R désignant le rayon de courbure en chaque point, cette courbe a pour propriété caractéristique la proportionnalité de sa courbure ($1/r$) à la longueur de l'arc (s) compté depuis l'origine 0. Le produit $r \cdot s$ est constant, ce qui conduit à une courbe paramétrée définie par les intégrales de Fresnel sur l'intervalle $[0, t]$, $t > 0$: La clothoïde (ou spirale de Cornu) :

$$x = \int_0^t \cos[\pi/2]t^2 dt, \quad y = \int_0^t \sin[\pi/2]t^2 dt$$

Cette courbe est très difficile à tracer puisque l'on ne connaît pas les primitives des fonctions $\cos[t^2]$ et $\sin[t^2]$.



Il suffit de passer le pont...

2

Le pont le plus long, le plus haut, le plus fin, le plus élancé... les pays ont toujours rivalisé à coup d'ouvrages à leur gloire. Mais depuis les premiers ponts en rondins de bois, il en a coulé des trombes d'eau sous leurs arches. Pour les construire, tous, des ingénieurs premiers bâtisseurs aux ingénieurs de l'époque romaine, de la Renaissance ou d'aujourd'hui, se sont abreuvés aux courbes mathématiques, parabole, ellipse, clothoïde ou spirales de toutes sortes. Aujourd'hui, avec le développement des matériaux et des méthodes d'analyse mathématique, les ponts gagnent en taille, en hauteur, en gigantisme et en beauté.

Parmi eux, le Storebælt East Bridge au Danemark. Sa spectaculaire travée de 1,624 km en fait un pont multifonctions : pont routier, tunnel ferroviaire. Cet ouvrage, qui compte parmi les plus hauts ponts suspendus du monde, franchit pas moins de 6 800 mètres de mer Baltique réalisant ainsi la plus longue traversée maritime par voie routière et ferroviaire. Ses deux pylônes principaux atteignent 254 m... Une belle hauteur que va dépasser, dès 2005, le futur Viaduc de Millau en France avec 343 m au sommet de ses pylônes.



Dessiné par l'architecte anglais Lord Norman Foster, ce pont multahaubané sera le dernier maillon de l'autoroute A75 Clermont-Ferrand - Béziers. Composé de piles minces, aux lignes élancées et d'un tablier très léger, il effleure la vallée en sept points seulement. Une prouesse technique relayée par des mesures sophistiquées, notamment par satellite GPS, et... par le recours à des courbes mathématiques. Les sept piles en béton présentent une variation constante de leur géométrie avec une succession de surfaces gauches et d'angles évoluant imperceptiblement, et prennent des allures de diapason diaboliquement élancé. D'une surface de base 200 m², chaque pile s'affine peu à peu jusqu'aux deux branches finales, d'une surface porteuse totale d'à peine 30 m² au sommet. Sur elles s'appuient le tablier, mais aussi les pylônes métalliques de 90 mètres de haut. Les ingénieurs ont pensé à tout... même à ce que sol ne soit pas visible pour éviter panique et vertige du conducteur.



Pour en savoir plus

sur le web

<http://www.mathcurve.com/courbes2d>

[de la caténoïde à la clothoïde]

<http://www.sciences-enligne.com/momo/chronomath>

[De la chaînette à la parabole des ponts]

<http://www.asco-travaux-publics.org>

[Tout sur le viaduc de Millau]

Les maths, un très bon placement

7 - Estimer - Prévoir - Estimating



La fortune des banquiers, assureurs et autres traders ne doit rien à la chance. Bien au contraire ! Elle tient plutôt dans leur capacité à apprivoiser le hasard et à couvrir les risques de pertes financières. Ils le font, non par des formules magiques, mais par le recours de plus en plus explicite à des mathématiques de pointe, comme la théorie des processus stochastiques et des formules sophistiquées. Celle de Black-Scholes et Merton règne depuis le début des années quatre-vingt sur les milieux de la finance et de la banque. On peut même la considérer comme à l'origine de l'essor considérable de plusieurs places financières. Ce qui démontre, s'il fallait encore le faire, la puissance des mathématiques et surtout leur actualité.

Une bien douce couverture

L'Aérospatiale vend ses avions en dollars, mais elle paie ses employés en euros.

Si elle sait qu'elle recevra 1 milliard de dollars en octobre 2005, elle n'a aucune certitude sur la quantité correspondante d'euros à cette date.

Elle doit impérativement se couvrir sur les cours de change dollar/euro.

De façon paradoxale, l'entreprise prendrait un risque considérable en n'utilisant pas de produits financiers !

Pour se protéger et grâce à des formules mathématiques, elle peut utiliser une option d'achat d'euros lui garantissant un cours de change minimum.



La bourse sous la garantie des maths

Il semble bien révolu le temps où un bon investisseur pouvait se contenter d'être futé, d'avoir du flair et le sens des affaires ! Aujourd'hui, il rêve de « spéculation sécurisée » et s'en remet à des formules mathématiques comme celle de Black-Scholes et Merton.

Tout investisseur qui se respecte jongle avec des termes comme, option négociable, volatilité d'une action, fluctuation du marché, théorie de l'arbitrage. Par là même il fait des maths difficiles, un peu comme Monsieur Jourdain faisait des vers, sans le savoir... ou presque.

Tous les logiciels financiers utilisent en effet des développements mathématiques relativement récents comme la formule de *Black-Scholes et Merton*, mise au point en 1973 par le duo Fisher Black et Myron Scholes d'une part et Robert Merton d'autre part. Aujourd'hui plus connue dans les salles de marchés que le théorème de Pythagore, elle a offert le prix Nobel d'économie à Scholes et Merton en 1997 (Black étant décédé entre temps). Mais combien d'initiés savent que cette formule découle d'un calcul sur des équations différentielles stochastiques ? Que la volatilité, terme qu'ils utilisent pourtant plusieurs fois par jour, désigne le coefficient décrivant l'amplitude et la fréquence des oscillations d'un cours autour de sa valeur moyenne dans cette même équation ?

Grâce à elle les financiers ont mis au point une kyrielle de produits alléchants, comme les options d'achat ou de vente, qui ont réveillé plus d'une fibre « boursicoteuse ». Car, comment ne pas céder aux sirènes de son banquier quand il vous promet la

lune, c'est-à-dire un fonds à rendement garanti et, apparemment, de ne jamais perdre d'argent ? Pourtant, chacun sait que les banquiers ne sont guère des philanthropes ! Cette garantie de revenu n'est évidemment pas gratuite, mais comment fixer son prix ? Il faut tenir compte des risques et des fluctuations des cours, dans le contexte d'un marché de plus en plus vaste et inextricable pour cause de mondialisation. Ce n'est pas simple et c'est là qu'interviennent la formule de *Black-Scholes et Merton* et ses dérivées puisque ce sont elles qui fixent ce prix.

Tout d'abord, prenons l'exemple très « terre-à-terre » de l'agriculteur. Ses revenus sont aléatoires et soumis à de multiples incertitudes. Si la récolte est trop bonne, ce n'est pas si bon pour ses affaires : les cours s'effondrent et il doit vendre en dessous du prix de production. Il reste à la merci d'aléas climatiques, de troubles socio-économique divers comme les grèves ou de crises sanitaires imprévues. La crise de la vache folle a montré que le cours du bœuf peut se retrouver divisé par 5 en quelques mois. Pour ne pas risquer de se retrouver sur la paille, il a tout intérêt à signer une *option* de vente avec un négociant.

Ce dernier s'engage, plusieurs mois à l'avance, à lui acheter sa production à l'instant T , à un coût minimum C , fixé par le contrat d'option. Mais l'agriculteur reste libre de vendre ou de ne pas vendre. Peut-il rêver d'un schéma plus idéal ?

L'instant T venu, deux cas se présentent.

Soit $C' \leq C$, le prix du marché au moment de la vente. Il est clair que l'agriculteur n'exercera l'option que si elle lui est favorable, c'est-à-dire que :

Si $C' < C$, il exerce son option, vend au cours C fixé par le contrat et réalise un bénéfice, la plus-value, égale à $C - C'$.

Si $C' \geq C$, il n'exerce pas l'option et vend au cours du marché.

L'option de vente est donc une sorte de contrat d'assurance contre la baisse des cours.

A l'inverse, l'option d'achat assure contre la hausse des cours.

Il faut aussi préciser que le négociant s'engage à payer l'option, qu'elle s'exerce ou non à l'instant T .

Dans son principe, l'option est aussi vieille que le « monde »... du commerce. Aristote rapporte l'histoire de la fortune de Thalès, oui, celui du célèbre théorème ! Certains mauvais esprits voyaient dans sa pauvreté la preuve de l'inutilité de la philosophie et des mathématiques. Pour réfuter leurs arguments, il se lança dans les affaires et prédit, sur de fumeuses bases astrologiques, que la prochaine récolte serait bonne. Personne ne le crut. Il loua donc,



par avance, en versant des arrhes très peu élevées, tous les pressoirs de la région. La récolte fut abondante et il les sous-loua fort cher, ce qui le rendit riche. Thalès s'était mis en position, tout comme l'acquéreur d'une option, de gagner beaucoup d'argent en risquant d'en perdre peu. En tous cas, il démontra que les mathématiciens peuvent s'enrichir aisément s'ils le souhaitent, et ne sont pas que de purs esprits !

On s'en doute, les options d'aujourd'hui se situent dans un contexte bien plus sophistiqué, mais leur philosophie est restée la même : « risquer un peu pour gagner parfois beaucoup », car, comme chacun le sait, qui ne risque rien n'a rien et on ne peut pas gagner de l'argent à coup sûr à partir d'un investissement nul. Pour le matheux spécialiste de la finance, cette affirmation de simple bon sens porte le nom plus jargonneux d'absence d'opportunités d'arbitrage. Historiquement, la Bourse a toujours accordé une « prime de risque » aux actions, un mode de placement particulièrement aléatoire mais éventuellement très rémunérateur. Ainsi, 1 dollar placé à la Bourse américaine en 1802 aurait valu 7,5 millions de dollars en 1997 s'il avait été investi en actions, 10 744 dollars, s'il avait été placé en obligations, 3 679 dollars, en bons du Trésor, et seulement 11,17 dollars, en or. Cet exemple montre que sur la longue durée, le rendement est à la hauteur des risques que prend l'investisseur. Avec des actions, il en prend plus qu'avec des options. L'option, comme on l'a vu précédemment, « transfère » le risque (sur une banque ou un autre investisseur). D'une certaine manière, l'option espère juguler en partie l'imprévu et le hasard pourtant inhérents aux marchés boursiers et à la vie commerciale au sens large.

L'évolution au cours du temps du prix d'une marchandise et du cours d'une action dépend d'un si grand nombre de facteurs qu'elle en devient imprévisible et « désordonnée », à l'instar du « mouvement brownien ». Pour la petite histoire, le botaniste écossais Robert Brown aimait contempler au microscope des particules de pollen baignant dans l'eau. Ces innombrables grains s'entrechoquent, entre eux, mais aussi avec les molécules du liquide dans lequel elles baignent, elles-mêmes sujettes à une agitation thermique. Il en résulte un mouvement des grains totalement aléatoire auquel il donne son nom en 1827.

Sous l'effet des innombrables transactions réalisées par des opérateurs très nombreux, le cours d'une action cotée en Bourse fluctue, en première approximation, de manière analogue au mouvement brownien. Dès 1900, le mathématicien français Louis



Bachelier a l'idée d'associer les fluctuations de la Bourse au mouvement brownien, bien avant qu'Einstein ne mette au point son équation de la chaleur. Louis Bachelier fut considéré à l'époque comme un « doux dingue » et ses travaux sont tombés dans l'oubli : il est parfois difficile d'avoir raison avant les autres !

La formule de *Black-Scholes et Merton* aujourd'hui si courante dans les milieux financiers, dérive d'outils mathématiques récents, en particulier le calcul stochastique créé vers 1945 par le japonais Kiyosi Itô, développés pour étudier le mouvement brownien et l'équation de la chaleur d'Einstein.

A ce stade, il faut préciser, au risque de compliquer encore plus l'affaire, que la formule de *Black-Scholes et Merton* ne fournit pas, tant que cela, le prix de l'option. C'est tout bêtement le marché qui dicte sa loi. Une autre formule mathématique, dite formule de couverture, l'accompagne. Elle permet de se constituer le portefeuille d'actions adéquat, pour disposer, au moment de l'échéance, du montant de la prime à payer.

De plus, le mouvement brownien, aussi complexe soit-il, ne décrit qu'approximativement les aléas du monde boursier.

Les mathématiciens recherchent donc d'autres modèles, moins simplificateurs. En particulier, le modèle de *Black-Scholes et Merton* part des présupposés de taux d'intérêts, de niveaux de risques ou de taux de rendement moyens, constants dans le temps. Ces dernières années, il a déjà bénéficié des apports de la théorie fractale ou de nouveaux outils comme les « équations différentielles stochastiques rétrogrades ». Et, surprise ! Ces outils développés pour les besoins des milieux financiers, éclairent aussi, d'un jour nouveau, des questions de géométrie compliquées comme celles des frontières libres que l'on retrouve par exemple dans la déformation de la forme d'un glaçon lors de sa fonte ! A ne plus savoir si l'argent c'est des maths ou l'inverse !

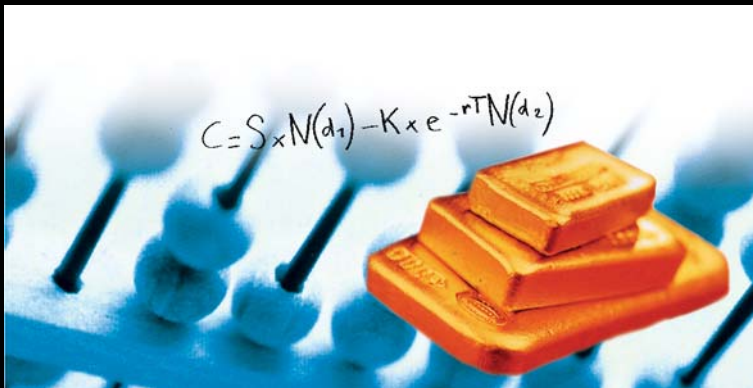
Le modèle de Black-Scholes et Merton

Supposons que l'on veuille fixer le prix d'une option concernant une certaine marchandise ou une certaine action financière dont le cours à l'instant t vaut S_t . Le modèle de Black-Scholes pour évaluer le prix de l'option part de l'hypothèse que, entre l'instant t et l'instant $t+dt$, le cours S_t subit une variation relative $(S_{t+dt} - S_t)/S_t$ égale à la somme de deux termes : l'un, μdt , est un accroissement non aléatoire représentant la "tendance" générale du marché ; l'autre, $\sigma(B_{t+dt} - B_t)$, correspond à une fluctuation aléatoire et imprévisible de type brownien (B_t représente un processus brownien, c'est-à-dire une grandeur analogue à celle de la position, à l'instant t , d'une particule effectuant un mouvement brownien le long d'une droite).

Cela s'écrit sous forme condensée :

$$dS_t/S_t = \mu dt + \sigma dB_t$$

où μ et σ sont des constantes. En prenant dt infiniment petit, cette expression revient à une équation différentielle dont "l'inconnue" est le cours S_t . En fait, il s'agit d'une "équation différentielle stochastique" car elle met en jeu un processus aléatoire ou "stochastique", le processus brownien B_t .



Pour en savoir plus

Les marchés fractals. Jacques Lévy-Véhel & Christian Walter

PUF, Paris 2002

Martingales et marchés financiers. Nicolas Bouleau

Ed Odile Jacob, Paris 1998

Chemins de ronde

8 - Optimiser - Optimisation



Mettre la Terre à plat, sur une carte, n'est pas chose aisée. Le globe, sphérique, est le modèle réduit idéal. Il conserve toutes les propriétés nécessaires à la production d'une carte fidèle : les rapports de surfaces ou de distances, les angles et le relief alors qu'aucun mode de projection sur un plan ne les conserve simultanément. Chaque projection est un compromis qui sacrifie certains paramètres au profit des autres. Ainsi, toutes les cartes sont fausses...

Bon sens ne saurait mentir...

Sur mer ou dans les airs, comment naviguer, du port A vers le port B ?

En allant au plus court le long d'un grand cercle sur le globe dont le tracé sur une carte classique est bien difficile à suivre ?

Sans cesse, il faudra changer de cap, à en perdre la boule.

Marcher au compas, à cap constant ? Sur la carte usuelle, celle de Mercator, la route est un segment de droit, une loxodromie. Naviguer devient alors plus simple, mais le trajet, paradoxalement s'allonge.

Les navigateurs fûtés choisissent souvent de couper la boule en deux.

Pour sa traversée de l'Atlantique, en 1927, l'aviateur Charles Lindberg décide de changer de cap tous les 1000 kilomètres et de suivre une succession d'arcs de loxodromies approchant le grand cercle idéal.



Sur la sphère, tout tourne rond

Pour relier Paris à New York ou Tokyo, les avions longs courriers, plutôt que de mettre cap à l'Ouest ou à l'Est, frôlent le pôle Nord. Le plus court chemin pour joindre ces capitales va à l'encontre des intuitions premières. Sur une sphère, comme notre Terre l'est en première approximation, mieux vaut ne pas se fier à ses sens.

Le saviez-vous ? Toutes les cartes sont fausses... Et la Terre est donc bleue... comme une orange dont vous allez peler l'écorce avec soin. Quelle que soit la façon de vous y prendre, les morceaux d'écorce restent incurvés et ne peuvent être appliqués sur un plan sans être déformés. C'est également vrai dans l'autre sens : essayez donc d'y coller un timbre de grande dimension : il fera des plis en quantité ! En fait, la géométrie sur une sphère est différente de la géométrie plane classique, euclidienne. Par exemple, le plus court chemin d'un point à un autre n'est plus un segment de droite. De même, non seulement la somme des angles d'un triangle est supérieure à 180° , mais elle n'est même pas constante ; elle dépend de la taille du triangle : le triangle équilatéral de 10 000 km de côté, formé d'un quart d'équateur, et de deux arcs de méridiens jusqu'au pôle Nord possède trois angles droits ! Cela implique que toutes les cartes planes dont vous pourrez disposer seront systématiquement fausses ! Voilà donc le décor campé : aller tout droit sur une sphère peut être surprenant, et même, vertigineux.

Dans un tel contexte, quel est le plus court chemin pour relier les ports (ou aéroports) A et B ? Sur mer et dans les airs, tous les navigateurs se sont posés et se posent chaque jour cette question.

Comme vous avez bon pied bon œil, supposons que vous naviguiez de A vers B. En croisant à cap constant, vous allongez votre route ! Persuadés du contraire, c'est pourtant ainsi que voguèrent les grands explorateurs transocéaniques du XVe et XVIe : au compas, toujours dans la même direction par rapport à la boussole, et en corrigeant constamment l'effet du courant pour garantir au navire une dérive angulaire constante.

Leur trajectoire tracée sur le globe terrestre coupe alors les méridiens (les grands cercles passant par les pôles et chacun des points de la trajectoire), sous un angle constant. On imagine aisément leur intérêt pour cette courbe qui leur facilitait la navigation puisqu'elle est facile à suivre et qu'ils appelaient le

« rhombus nautarum », le rhombe des marins. Ce rhombe correspond à une division élémentaire du compas fractionné en 32 aires de vents de $11^\circ 15''$ chacune. De plus, ces navigateurs avaient la certitude de réaliser ainsi le plus court chemin entre le port de départ et celui d'arrivée.



Russi, quel désappointement quand le mathématicien portugais Pedro Nuñez Salaciense, le bien nommé, prouve en 1530 leur erreur d'appréciation. Il montre que le chemin le plus court entre deux points du globe suit en réalité l'arc de grand cercle joignant les deux points, [l'arc inférieur à une demi-circonférence, bien sûr]. Dans quelques cas exceptionnels, si le port de départ se situe sur l'équateur et que de surcroît le navire ou l'avion mette cap plein Nord, plein Sud, plein Est ou plein Ouest, les deux chemins se confondent et le rhombus nautarum réalise bien le plus court chemin.

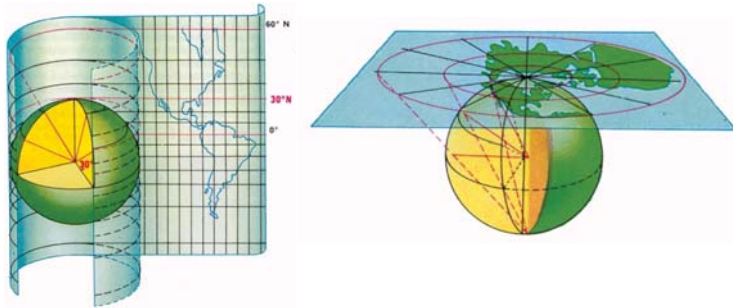
Le chemin le plus court qui suit donc un arc de grand cercle, autrement dit une géodésique du globe s'appelle l'orthodromie, du grec *orthos* et *dromos* pour « courir en ligne droite ».

La loxodromie, quant à elle, de *loksos* et *dromos* pour une course, oblique cette fois-ci, correspond à un trajet à cap constant qui coupe avec un angle constant les méridiens de la sphère terrestre.

Mais pourquoi les navigateurs qui voguaient vers des ailleurs inconnus au XVI^e siècle, s'accrochaient-ils tant à ces trajets qui n'avaient pas encore reçu l'appellation de loxodromie ? En fait, à côté de leur compas de navigation, ils étalaient une carte de la Terre, plane, bien sûr et ne pensaient pas à emporter un globe dans leurs bagages. Or, nous l'avons vu, toutes les cartes planes sont fausses. Elles leur faisaient donc miroiter des chemins d'illusion.

Pour mettre la Terre à plat et en faire des cartes, on doit passer

par une transformation géométrique nommée « projection ». Elle indique comment reporter chaque point du globe sur le plan en deux dimensions de la carte. Dès lors, on introduit forcément des déformations, d'angle ou de longueur. Il a fallu attendre l'année 1933 pour que le mathématicien polonais Karol Borzok démontre qu'on ne peut représenter continûment une sphère comme une partie de l'espace euclidien de même dimension. En d'autres termes, cela signifie qu'il est impossible de projeter tout le globe sur une seule carte plane sans discontinuité.

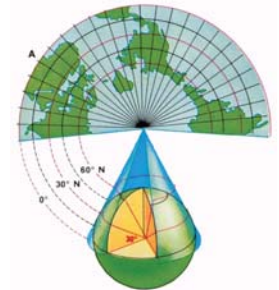


Représenter la Terre sur une surface plane est donc un défi et la meilleure façon de le faire reste le globe... Non plan ! Ce modèle réduit idéal de la Terre conserve toutes les propriétés nécessaires pour produire une carte parfaite : la superficie, la distance, la direction, et le relief. Mais dès qu'on souhaite le projeter sur une carte plane, ces propriétés ne peuvent pas être toutes conservées simultanément et chaque projection est donc un compromis, rendant compte de certaines propriétés avec précision, tandis que d'autres seront altérées. Tout dépend de l'usage souhaité. On dénombre ainsi des dizaines de types de cartes. Notons que toutes les projections conservent un élément important, la localisation relative d'un lieu par rapport à un autre. Dans toutes les cartes, Paris se situe bien au sud de Stockholm : c'est déjà cela de gagné !

Un géographe souhaitera disposer d'une carte qui respecte les surfaces, où la superficie de la France reste bien égale à 13 fois celle de la Suisse. Une telle projection est dite équivalente. Place alors à l'imagination ! Dans la projection isocylindrique, la Terre privée de ses pôles est projetée sur un cylindre tangent à l'équateur. On associe chaque point du globe au point du cylindre situé à la même hauteur. La projection conique équivalente décrit la Terre privée d'un méridien sur un cône tangent à ce méridien tandis que la projection azimutale équivalente la transcrit privée

d'un point qui joue le rôle de point de perspective. Cette projection est utile pour représenter les régions polaires.

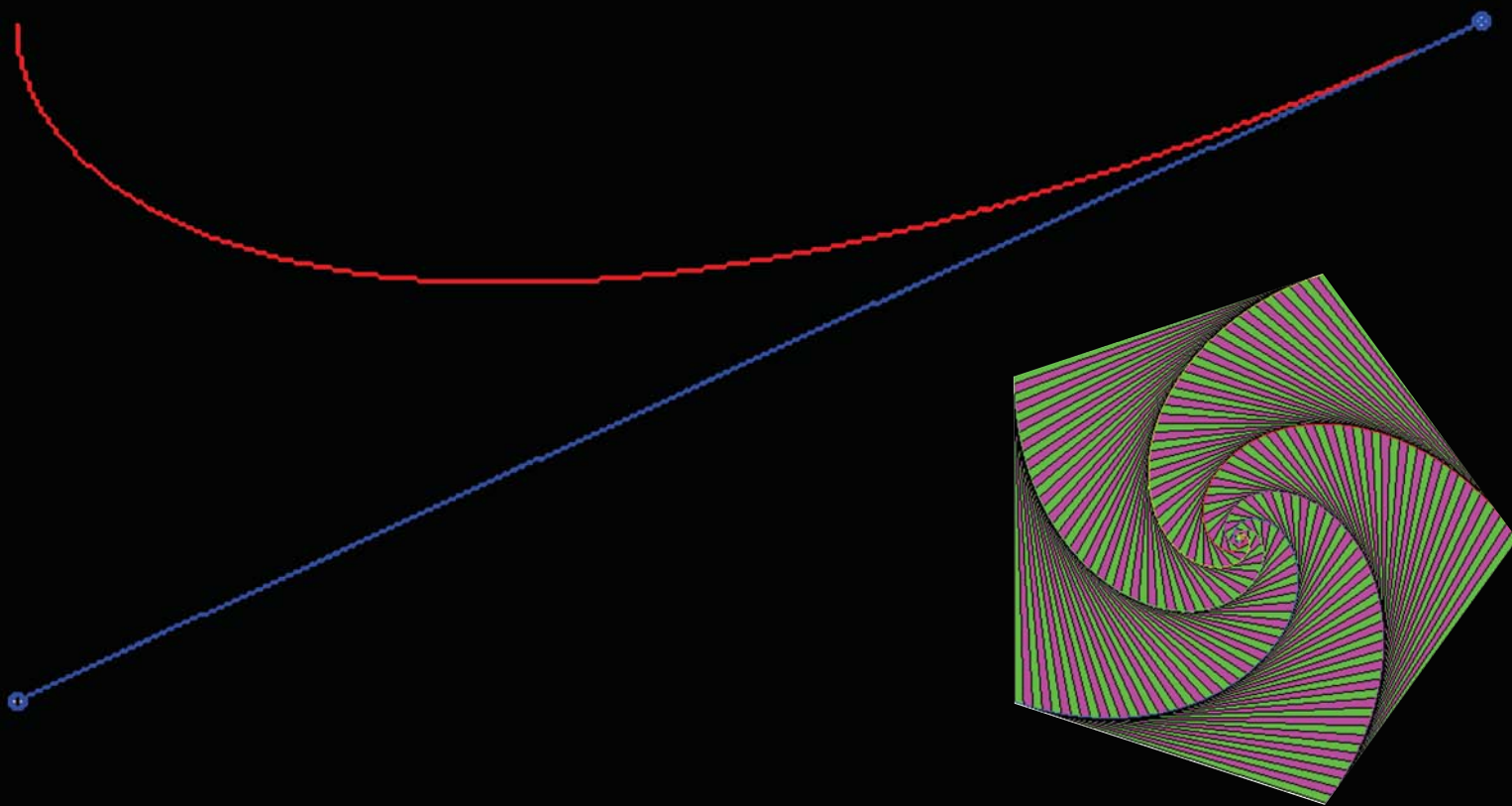
On peut aussi s'intéresser à l'autre grand groupe de projections, celui qui conserve les angles. Ces projections sont dites conformes. Parmi elles, la projection de Mercator, due au mathématicien flamand Gerhard Kremer [alias Mercator] en 1569. Les rayons de la Terre sont projetés sur un cylindre tangent à l'équateur, qui est ensuite déroulé. Les régions éloignées de l'équateur se présentent dilatées et déformées. Sur cette carte, une loxodromie est un segment de droite. On comprend donc l'intérêt des navigateurs pour la célèbre carte de Mercator... aujourd'hui encore ! En revanche, la projection conique conforme du mathématicien mulhousien Lambert [1772] minimise les déformations dans la zone de contact du cône. Les cartes de France s'obtiennent ainsi.

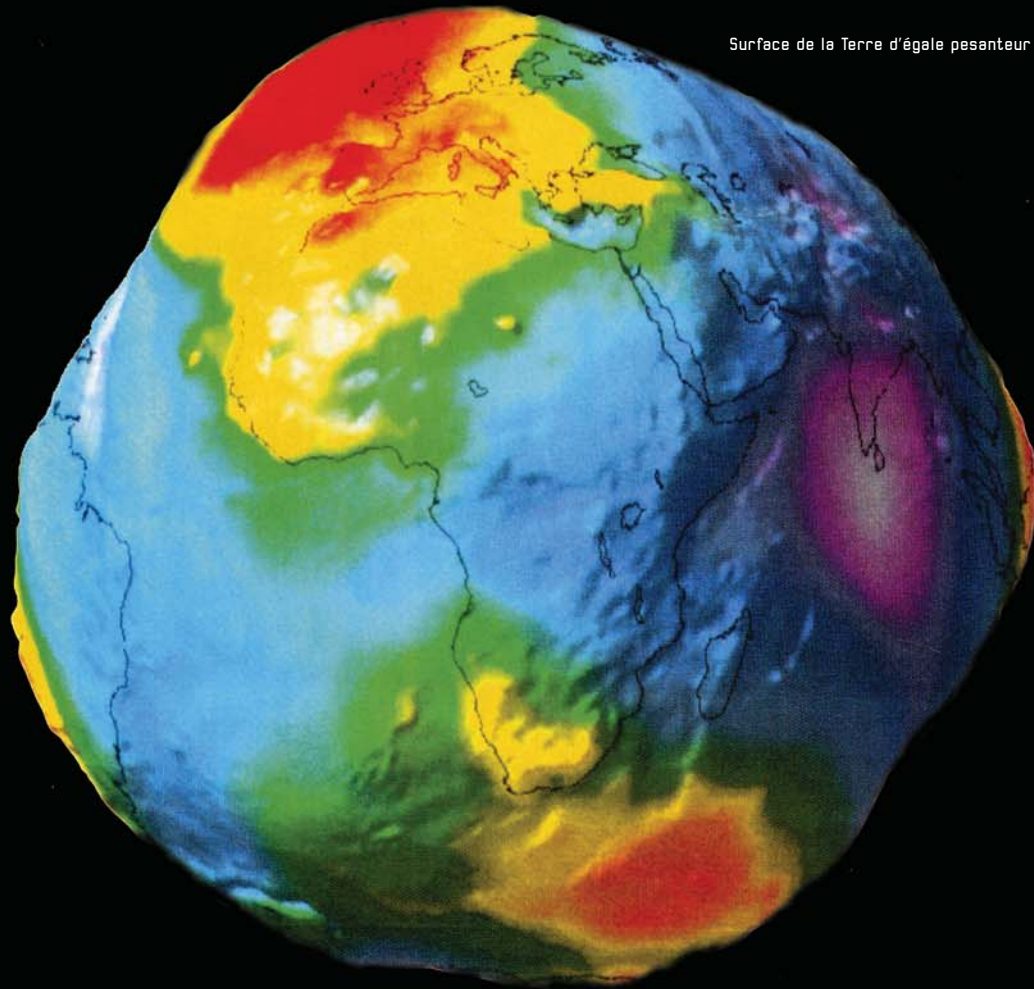


La projection conforme préférée des matheux reste la projection stéréographique. Bernoulli déjà, avait repéré que via cette projection, une loxodromie devient une spirale logarithmique, courbe qu'il adulait par-dessus tout. La recette consiste à transformer la sphère privée d'un point, appelé le pôle de projection, sur un plan orthogonal à l'un des plans passant par le pôle de projection et le centre de la sphère.

Les matheux sont alors contents. La projection stéréographique permet de visualiser dans le plan les modèles de géométrie non euclidienne. Ainsi, sur la sphère, à trois dimensions, on peut faire de la géométrie à deux dimensions. On y baptise « droites » les géodésiques [encore appelés les grands cercles]. Tous les axiomes de la géométrie euclidienne se vérifient alors, à l'exception d'un seul, le cinquième postulat d'Euclide, celui qui traite des parallèles. Deux « droites », autrement dit deux géodésiques, n'y sont parallèles que si elles se confondent. Il fallait bien ce petit croc-en-jambe à Euclide pour que sur une sphère, tout tourne rond !

Prenons le cas où deux bateaux se déplacent en restant toujours perpendiculaires l'un à l'autre. Les deux navires décriront la même spirale logarithmique. De plus, si un des bateaux se déplace vers l'extérieur de la spirale et l'autre vers l'intérieur, même si le poursuivi va plus vite que le chasseur, ils finiront par se rencontrer. Bernoulli remarqua dès 1689 qu'un navire qui poursuit, non pas un autre navire mais l'objectif d'un pôle, en se déplaçant à cap constant (selon une loxodromie), ne parviendra jamais au bout du voyage. Sur la carte, il parcourt une spirale logarithmique qui tourne indéfiniment autour du pôle sans jamais l'atteindre.





Pour en savoir plus

<http://thierry.hatt.gps.free.fr/projections/index.htm>
http://atlas.gc.ca/site/francais/learningresources/carto_corner/map_projections.html
<http://www.mathcurve.com/courbes3d/loxodromie/sphereloxodromie.shtml>
<http://www.sciences.univ.nantes.fr/physique/perso/gtulloue/Meca/RefTerre/Orthodromie.html>
[visualisation interactive de loxodromie et orthodromie]
<http://www.lion1906.com/Pages/Liens.html>

L'épreuve de la preuve

9 - Prouver - Démontrer - Proving



La preuve est en général une épreuve dans la mesure où tout mathématicien doit persuader ses pairs du bien-fondé de son intuition. Le point critique tient en ce que la preuve est écrite par un être humain, et présentée à d'autres êtres humains.

Elle ne peut "raisonnablement" contenir tous les pas de raisonnement jusqu'au plus élémentaire, chaque preuve devenant alors démesurément encyclopédique.

Aujourd'hui la preuve formelle, quand elle est développable, reste la seule démonstration faisant appel à la logique qui exclut toute tergiversation et qui fasse office de réelle validation.

La preuve était presque parfaite

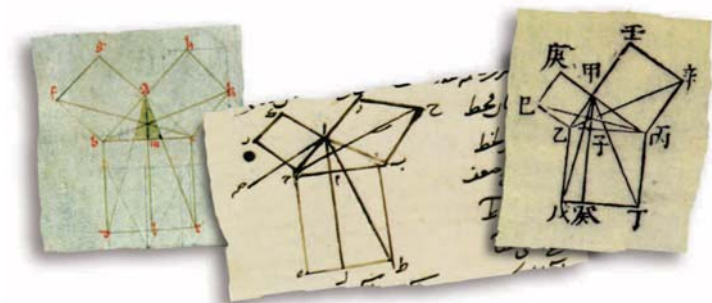
Contrairement aux idées reçues, démontrer n'est pas une fin en soi pour le mathématicien. Son travail consiste plutôt à « conjecturer » et imaginer de nouvelles pistes. Un bon matheux possède donc avant tout une grande imagination.



De Pythagore à Wiles

Derrière la notion de « preuve » se profile une question essentielle, du moins pour le mathématicien : qu'est-ce que faire des maths ? Certains pensent, trop vite, que le mathématicien s'échine à démontrer des théorèmes, c'est-à-dire, qu'à partir d'axiomes, il raisonne et trouve des théorèmes. Mais qui énonce ces axiomes ?

Considérons le célèbre Théorème de Pythagore. On en connaît plus d'une centaine de démonstrations, plus ou moins longues ou élégantes.



Pourtant l'absence de démonstration n'induit pas sa non-utilisation. Le théorème de Pythagore est ainsi connu, bien avant sa stipulation. On retrouve la trace de ce qu'il faut bien considérer comme les premières tables de trigonométrie dès les Babyloniens, plus de 2 000 ans avant JC, entre autres dans la tablette dite Plimpton 322, conservée à l'Université Columbia aux États-Unis. Cet objet émouvant présente 15 triangles rectangles et servait peut-être aux partages de parcelles. Il montre surtout, qu'à l'origine des mathématiques il y a des hommes en société.

Et quand la société évolue, les mathématiques, elles aussi, se transforment. On s'aperçoit donc que la notion de preuve apparaît avec l'avènement de la Démocratie, en Grèce. Le mathématicien doit alors avancer suffisamment d'arguments pour convaincre ses concitoyens du bien-fondé de ce qu'il énonce. En d'autres termes, il doit en apporter la preuve !

Mais ce n'est pas toujours possible. Les mathématiciens formulent souvent des conjectures, c'est-à-dire des énoncés qu'ils espèrent vrais, sans être capables de les démontrer. En 1998 Thomas Hales réussit à faire « tomber » la conjecture de

Képler. Elle donnait du fil à retordre aux matheux depuis près de 400 ans ! (voir L'orange du marchand)

Dans l'univers mathématique, quand une démonstration est avancée, des mathématiciens experts se chargent de la vérifier. Et ce n'est jamais une mince affaire ! La preuve de Thomas Hales est aussi longue que difficile. L'ensemble des codes informatiques et des données nécessaires à la démonstration occupe pas moins de trois giga bits de mémoire. Thomas Hales a dû résoudre plus de 100 000 problèmes linéaires de 100 à 200 variables et 1 000 à 2 000 contraintes pour chacun d'entre eux ! A titre indicatif, dans les collèges et lycées, les élèves planchent sur la résolution de deux ou trois équations linéaires à deux ou trois variables, au grand maximum ! Pour vérifier la preuve de Hales, la célèbre revue *Annals of Mathematics*, a mandaté une équipe de 12 mathématiciens. Après plus de quatre années de travail, ils ont rendu leur verdict : la preuve est valide à 99% ! Les experts se sont déclarés incompetents pour vérifier certains détails et calculs menés à bien avec l'outil informatique. Piqué au vif, Thomas Hales a lancé le projet Flyspeck. Il appelle les mathématiciens et informaticiens intéressés par le défi à unir leurs forces...

de pensée, pour trouver une preuve formelle de la conjecture de Képler. Cette preuve élaborée à l'aide de propositions logiques serait alors « sans appel », coupant court à toutes tergiversations.

Avant les progrès de la logique au début du xxe siècle, de graves incertitudes divisaient souvent les esprits, confrontés à des preuves dont la « véracité » restait bien difficile à attester. Ce fut ainsi le cas à la fin du xviie siècle avec la découverte du calcul différentiel alors que la notion de limite restait imparfaitement maîtrisée (elle le sera bien plus tard, par Cauchy, 1789-1857 puis par Weierstrass, 1815-1897).

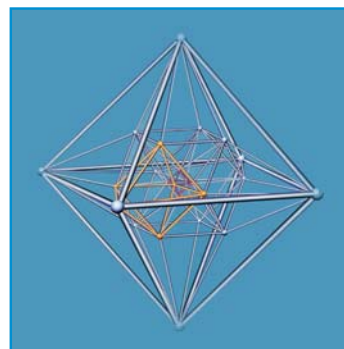


Image en 3D d'un polytope autodual en 4D.
Fernando da Cunha

Plus près de nous, le mercredi 23 juin 1993, à l'issue de trois jours de conférence Andrew Wiles concluait en public une présentation de la preuve de la très célèbre conjecture de Fermat. Rappelons que ce magistrat français avait annoté un livre de mathématiques dans la première moitié du 17^e avec les mots suivants : « Il n'est pas possible de décomposer un cube en somme de deux cubes, une puissance quatrième en somme de deux puissances quatrièmes et généralement aucune puissance d'exposant supérieur à 2 en deux puissances de même exposant ». Cette courte annotation est vite devenue la « conjecture casse-tête » la plus célèbre pour les matheux, jusqu'à ce jour du 23 juin 1993.

Retrouvons donc Andrew Wiles face à ses juges mathématiciens. Sur le coup, personne n'a pu vérifier sa démonstration, dont seules les grandes lignes avaient été exposées oralement. Un comité d'experts de six membres a dû travailler durant des mois pour la validation d'une démonstration lourde de deux cents pages... Plusieurs fois, ils ont douté, ont même trouvé un "bogue" dans la démonstration provenant de l'utilisation d'un procédé appliqué hâtivement par Andrew Wiles. Plus de deux ans furent nécessaires pour corriger l'erreur et arriver enfin à une démonstration complète et acceptée des experts. Avec une preuve formelle, ces tergiversations n'auraient pas existé. Pourtant qui apporte la preuve ne récolte pas pour autant la vérité ! Jusqu'au début du 20^e siècle les mathématiciens étaient persuadés qu'on pouvait démontrer toutes les vérités mathématiques par déduction. En 1931 le logicien Kurt Gödel jette un pavé dans le miroir aux alouettes de la vérité mathématique. Par son célèbre théorème d'incomplétude, il établit qu'il existe des vérités mathématiques impossibles à démontrer dans le cadre axiomatique dans lequel on se place. Ceux qui ont vu dans la rigueur formelle du raisonnement une garantie de sa sûreté, ont dû reconnaître que même si chaque phrase d'un raisonnement découle des précédentes par des règles bien précises, rien ne garantit que ces règles forment une théorie cohérente, et donc que les phrases démontrées soient vraies. Le raisonnement a donc fini par révéler ses limites. Il va falloir alors oublier le rêve d'une mathématique entièrement déductible de la vérité de ses premiers principes, idéal qui remonte à Aristote et que la plupart des mathématiciens ont gardé dans un coin de leur tête. Finalement ce que l'on sait aujourd'hui c'est qu'on ne sait rien... Mais seuls ceux qui en savent beaucoup peuvent se permettre cette humilité !



Le tableau noir des Shadocks et de Gödel
© Jacques Rouxel & Centre-Sciences

Presque prouvé, ou l'intime conviction de la preuve

Un nombre parfait est un nombre qui est égal à la somme de ses diviseurs différents de lui-même. Par exemple le nombre 6, qui est divisible par 1, 2, 3 est un nombre parfait, car $6 = 1 + 2 + 3$. C'est le plus petit nombre parfait, et les trois suivants sont 28, 496, 8128. Mais existe-t-il des nombres parfaits impairs ? La question est posée depuis deux millénaires. Mais si personne n'en a jamais trouvé, personne n'a démontré qu'il n'en existait pas. Malgré cette absence de démonstration, tout le monde est persuadé aujourd'hui qu'il n'existe pas de nombre parfait impair, d'autant plus qu'on a démontré, dans les règles de l'art de la preuve formelle cette fois-ci, une grande quantité de propriétés que devrait posséder un tel nombre parfait impair N , s'il en existe.



Image des mathématiciens au travail ?

Amusant mais très énervant : le cycle $3x + 1$ ou la conjecture de Syracuse

A vos calculs ! Il s'agit d'une séquence très simple d'opérations sur des nombres entiers qui ramène toujours, en final, au nombre 1. Soit un nombre x , s'il est pair vous le divisez par deux, s'il est impair vous faites l'opération $3x+1$. Puis vous agissez de la même manière sur les résultats. Au cours des itérations successives, le nombre obtenu va osciller, atteignant parfois des hauteurs insoupçonnées, mais il finira toujours par se poser sur la valeur 1. En apparence bien simple, cette conjecture reste non démontrée. Elle a pourtant été vérifiée sur un très long cycle, jusqu'à 10^{16} .

Le Clay Mathematic Institute offre un million de dollars à celui qui résoudra l'une des sept énigmes mathématiques suivantes. Si leur énoncé est simple, leur contenu reste inaccessible à l'élève profane, qui devra faire « beaucoup de maths » pour espérer récolter le pactole.

• L'hypothèse de Riemann

Elle s'intéresse à la distribution des nombres premiers parmi les entiers. Ces nombres, divisibles que par 1 et eux-mêmes, sont essentiels à la cryptographie.

• La conjecture de Poincaré

Si on trace une courbe fermée qui ne se recoupe pas à la surface d'un ballon et qu'on le découpe selon cette courbe, on obtient deux morceaux différents. Poincaré conjecture que cela reste vrai si on passe des surfaces à deux dimensions aux espaces à trois dimensions.

• La conjecture de Birch Swinnerton-Dyer

Le problème consiste à trouver des solutions aux équations du type $x^2 + y^2 = z^2$

• Le problème P versus NP

Où pourquoi la recherche de la solution prend souvent plus de temps que la vérification de l'exactitude de la solution.

• Les équations de Navier-Stokes

Ces équations qui gouvernent la mécanique des fluides et datent du 19e restent irrésolues. Il s'agit de montrer que le problème est bien posé, c'est-à-dire que, si on connaît le mouvement du fluide à un instant initial, le problème a une solution unique à tout instant ultérieur.

• La conjecture de Hodge

Elle suggère que certains objets mathématiques s'interprètent comme une combinaison de formes géométriques d'origine algébrique.

• Les équations de Yang-Mills

Les prédictions de leurs équations, qui datent des années 1950, se vérifient quotidiennement dans les accélérateurs de particules. Mais il n'y a aucune preuve mathématique de l'existence des champs quantiques gouvernés par ces équations.

Pour en savoir plus

Sur le web

<http://www.math.pitt.edu/~thales> [Pour rejoindre le projet Flyspeck lancé par Thomas Hales]

<http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/~history> [Biographies en ligne de mathématiciens, en Anglais]

<http://www.claymath.org/millennium/> [Les sept problèmes du millénaire]

Livres & périodiques

- Gödel, Pierre cassou-Noguès. Ed. Les Belles Lettres. Paris 2004
- Pierre de Fermat, Paul Féron. Presses de l'Université des Sciences Sociales de Toulouse, 2002
- Le théorème de Gödel, Kurt Gödel - Ernest Nagel - James R. Newmann et Jean-Yves Girard - Le Seuil, Paris 1997
- Maths en pièces, M. Darche & R. Torrent. Adecum-Centre-Sciences, Orléans 1996
- La Logique, Gilles Dowek, Dominos, Flammarion. Paris, 1995
- La Science au présent, 2004, Encyclopædia Universalis, p 123-127, « Les résultats de Woodin sur l'hypothèse du continu »

Pourquoi les mathématiques ?

Une exposition de mathématiques ?

Mais que peut-on montrer ? Comment est-ce possible ?

C'est ce pari que l'équipe formée par l'UNESCO a voulu tenter !

Le mérite en revient à Minella Alarcon qui, soucieuse de la mission de l'UNESCO envers les sciences, a réuni des mathématiciens et mathématiciennes de plusieurs pays : Japon, Philippines et France afin de confronter et d'harmoniser les différentes expériences de chacun dans le domaine de la popularisation des mathématiques.

Des discussions menées conjointement avec le Centre Sciences d'Orléans (CCSTI de la région Centre) est née l'exposition « Pourquoi les mathématiques ? ».

Le temps de la réalisation concrète de l'exposition a été jalonné par des confrontations toniques à l'intérieur du groupe de travail où se décidèrent les thèmes, le contenu et la structure de l'exposition qui a été présentée pour la première fois en juillet 2004 au Danemark.

J'espère que les visiteurs sentiront l'enthousiasme qui nous habitait et seront sensibles à la beauté de l'exposition.

Je voudrais remercier ici tous les mathématiciens qui ont contribué bénévolement à l'exposition en rédigeant des textes à partir desquels l'exposition a été élaborée. C'est grâce à eux que nous montrons au public quelques découvertes récentes en mathématiques et leurs applications au monde réel.

Après Paris, l'exposition va voyager à travers le monde: en Afrique du Sud, au Canada, en Chine ainsi que d'autres destinations en projet.

Je souhaite que l'exposition s'enrichisse des différentes cultures qu'elle va rencontrer et que le public prenne autant de plaisir à la visiter que nous avons eu à la concevoir.

au nom de toute l'équipe,
Mireille Chaleyat-Maurel

01 - Lire la nature - read the nature

Miguel Bello Mora - Mission Analysis and Engineering, GMU, Espagne

02 - Paver un sol - Tilings & Symmetries

André Brack - Cbm - Cnrs - Orléans

Jin Akiyama - RIED, Tokai University - Japon

03 - Remplir l'espace - Filling a space

Marcel Berger - Ihes

04 - Relier d'un trait - Connections

Andreas Frommer - Université de Wuppertal - Allemagne

Pierre Colka - Map5-Université Paris 5

05 - Pourquoi calculer ? - Calculating

Jean-François Colonna - Lactamme. École Polytechnique, Paris

Jean-Paul Delahaye - Université Lille 1

Françoise Dibos - Ceremade-Université Paris 9

Georges Kœpfler - Map5-Université Paris 5

06 - Construire - Constructing

Jin Akiyama - RIED, Tokai University - Japon

Vagn Lundsgaard Hansen & Niels J. Gimsing,
Technical University of Denmark, Copenhagen

07 - Estimer - Prévoir - Estimating

Bernard Bru - Université Paris 5

Bernard Lapeyre - ENPC-École polytechnique, Paris

Gilles Pages - Université Paris 6

08 - Optimiser - Optimisation

Michele Emmer. Università di Roma "La Sapienza"

Roger Trias Sanz - Institut Géographique National, Paris

Jin Akiyama - RIED, Tokai University - Japon

09 - Prouver - Démontrer - Proving

Bernard A. Hodgson, Université Laval - Québec

10 - Soigner - Traiter - Treatments

Bernard Prum - Cnrs-Génopole - Paris - Évry

Bernard Girard - Samos - U

Une exposition internationale
réalisée à l'initiative de l'UNESCO
par Centre-Sciences,
CCSTI de la région Centre (Orléans-France)
avec
la Tokai University (Japon)
et
l'Ateneo de Manille University (Philippines).

Comité Scientifique

Jin Akiyama, Tokai University
Minella Alarcon, UNESCO
Michèle Artigue, ICMI
Jean Brette, Palais de la découverte, Paris
Mireille Chaleyat-Maurel, Université Paris 5
Michel Darche, Centre-Sciences
Chie Nara, Tokai University
Mari-Jo Ruiz, Ateneo de Manilla University
Toshinori Sakai, Tokai University
Gérard Tronel, WYM 2000



Partenaires

Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique [ICMI]
Union Internationale Mathématique [IMU]
Société Mathématique Européenne [EMS]
Japanese Ministry of Education [MONBUSHO]
Tokai University (Japan)
Ateneo de Manila University (Philippines)
Universités de Paris 5, Paris 6 & Paris 7
Universités d'Orléans & de Tours
Académie des Sciences [France]
Institut des Hautes Etudes Scientifiques [IHES]
Société Mathématique de France
Société de Mathématiques Appliquées et Industrielles
Andra [France]
Microsoft France
Conseil régional du Centre
Mairie de Paris

L'exposition

Expériences & modèles

Centre-Sciences & Tokai University

Scénographie : Centre-Sciences & Samuel Roux

Graphisme : Samuel Roux, Orléans

Maquettes et manipulations :

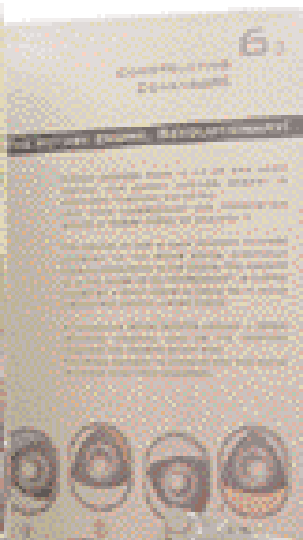
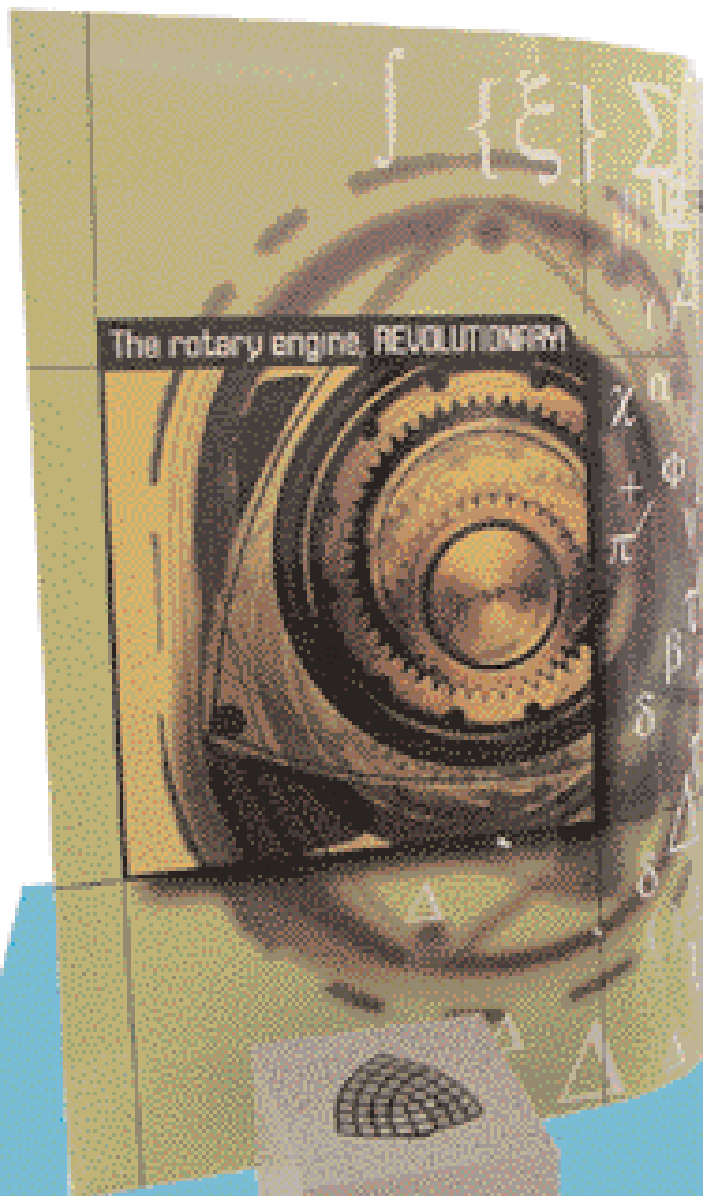
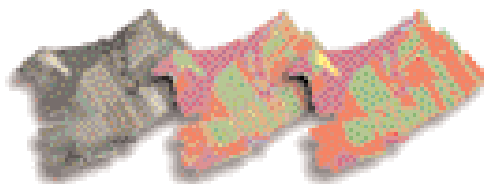
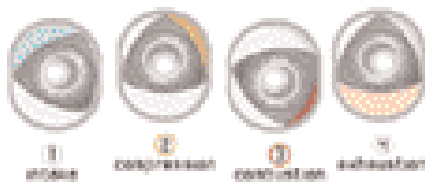
Menuiserie Berge, Fleury-les-Aubrais

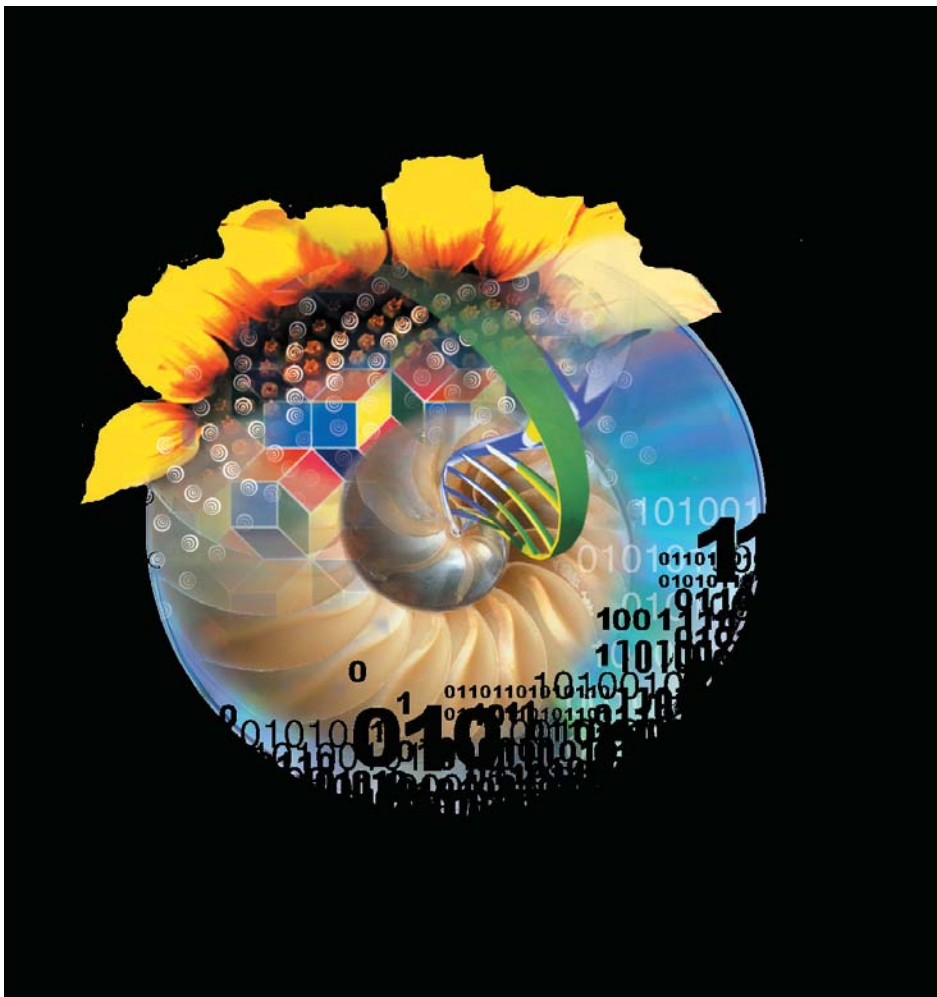
BCF, La Ferté Saint Aubain, Christian Lacroix, Orléans

Impressions numériques : API, Saint Denis en Val

Traductions : Susan Hartnell-Beavis [UK],

Mari-Jo Ruiz [Manille] & Mary Falk de Losada [Colombie].





Pourquoi les mathématiques ?

Experiencing
mathematics

Une exposition internationale réalisée à l'initiative de l'UNESCO